C03

Exercice 1 — *4 points*

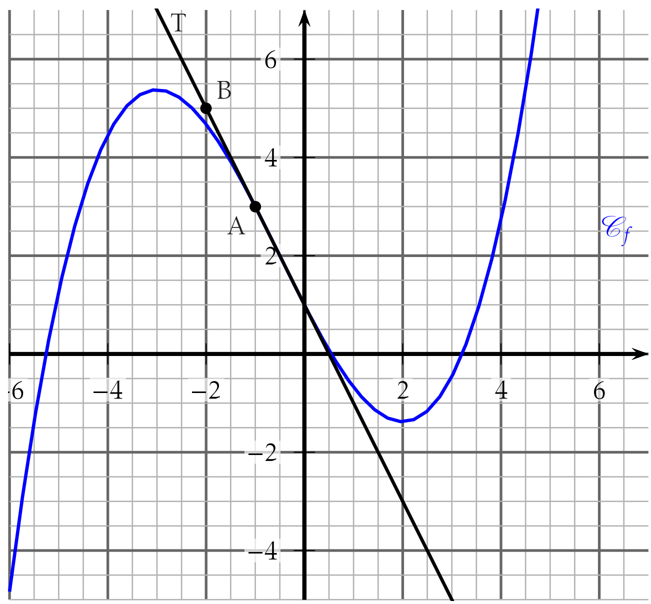
D'après Centres Étrangers, juin 2016, exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses est exacte. Pour chaque question, indiquer la réponse choisie dans case prévue. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse incorrecte enlève* 0,25 *point, une absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A –

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[-6;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A$(-1;3)$. Elle passe par le point B$(-2;5)$.

Le nombre dérivé de f en -1 est égal à

a) -2 **b)** 1 **c)** $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. On lit $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{1} = -2$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ est

a) $[-6;-3] \cup [2;4]$ **b)** $[-3;2]$ **c)** $[-6;-5{,}2] \cup [0{,}5;3{,}2]$ ☐ 2

La dérivée est négative quand la fonction est décroissante.

Partie B –

Dans cette partie, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-2;5]$ par $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

et on note g' sa fonction dérivée.

Pour tout $x \in [-2\ ;\ 5]$

a) $g'(x) = -2x^2 + 3x + 12$ **b)** $g'(x) = -3x^2 + 2x + 12$ ☐ 3
c) $g'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$g(x)$ est de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a = -2$, $b = 3$, $c = 12$ et $d = 0$; donc $g'(x)$ est de la forme $3ax^2 + 2bx + c$.

Le maximum de la fonction g sur $[-2;\ 5]$ est égal à

a) 4 **b)** 20 **c)** -115 ☐ 4

À l'aide de la calculatrice…

Exercice 2 —

D'après Métropole - La Réunion, septembre 2016, exercice 4

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par : $C(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45$

L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à 670 €.

Partie A –

On a représenté, la courbe Γ représentant le coût de production dans un repère orthogonal du plan.

Pour les lectures graphiques, laisser apparents les « pointillés » de lecture.

1. À l'aide d'une lecture graphique, donner le coût correspondant à une fabrication quotidienne de 9,5 tonnes de peinture.
   On lit : environ 6 000 €.

2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer la production quotidienne correspondant à un coût de fabrication de 16 000€, puis retrouver ce résultat par le calcul.
   16 000 correspond à 16 milliers. On lit : environ 17,5 tonnes de peinture.
   Par le calcul : on cherche $x \in [1\,;20]$ tel que : $0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45 = 16$
   $0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45 - 16 = 0$
   $0{,}05x^2 - 0{,}1x - 13{,}55 = 0$
   $a = 0{,}05$ $b = -0{,}1$ et $c = -13{,}55$
   donc $\Delta = (-0{,}1)^2 - 4 \times 0{,}05 \times (-13{,}55)$
   $= 2{,}72$
   L'équation admet donc deux solutions : $\alpha = \dfrac{-(-0{,}1) - \sqrt{2{,}72}}{2 \times 0{,}05} \approx -15{,}19$
   $\beta = \dfrac{-(-0{,}1) + \sqrt{2{,}72}}{2 \times 0{,}05} \approx 17{,}49$
   comme la solution doit être dans $[1\,;20]$, on ne garde que β.

Partie B –

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût unitaire, le coût $f(x)$, auquel revient alors la production d'une tonne de peinture.

1. Sachant que, pour tout $x \in [1\ ;\ 20]$, $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, vérifier que :

$$f(x) = 0{,}05x - 0{,}1 + \frac{2{,}45}{x}$$

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45}{x} = \frac{0{,}05x^2}{x} - \frac{0{,}1x}{x} + \frac{2{,}45}{x} = 0{,}05x - 0{,}1 + \frac{2{,}45}{x}$$

2. On note f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ puis démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;20]$, $f'(x) = \dfrac{0{,}05(x^2 - 49)}{x^2}$.

f est de la forme $u(x) + v(x)$ avec :
$u(x) = 0{,}05x - 0{,}1$, donc $u'(x) = 0{,}05$
et $v(x) = \dfrac{2{,}45}{x} = 2{,}45 \times \dfrac{1}{x}$, donc $v'(x) = 2{,}45 \times \dfrac{-1}{x^2}$
d'où $f'(x) = 0{,}05 - \dfrac{2{,}45}{x^2} = \dfrac{0{,}05 \times x^2 - 2{,}45}{x^2}$
La méthode la plus simple consiste à développer l'expression proposée :
$$\frac{0{,}05(x^2 - 49)}{x^2} = \frac{0{,}05x^2 - 0{,}05 \times 49}{x^2} = \frac{0{,}05x^2 - 2{,}45}{x^2}$$
On retrouve l'expression de $f'(x)$, donc : $f'(x) = \dfrac{0{,}05(x^2 - 49)}{x^2}$

3. Compléter le tableau de variation de f (valeurs et flèches).

x	1		7		20
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	2,4	$\searrow$	0,6	$\nearrow$	1,0225

4. a) Préciser la quantité de peinture que doit produire l'entreprise pour que le coût unitaire soit minimal.

Par lecture du tableau de variations : le coût unitaire est minimal quand l'entreprise produit 7 tonnes de peinture.

b) Quel est ce coût unitaire minimal ?

Par lecture du tableau de variations : Le coût unitaire minimal est de 0,6 milliers d'euros, soit 600 €.

c) Quel est alors le bénéfice réalisé par l'entreprise ?

On sait qu'une tonne de peinture est vendue 670 €, donc le prix de vente est $7 \times 670 = 4\,690$, soit 4 690 €.
La production de 7 tonnes de peinture coûte : $C(7) = 4{,}2$, soient 4 200 €.
Donc le bénéfice est de $4\,690 - 4\,200 = 490$ €.