____oO° Bac Blanc - T STMG °Oo____

Sujet à rendre avec la copie — Numéro d'anonymat : . . . .

Note sur 35 points (dont 1 point rédaction générale)

Les calculatrices scientifiques sont autorisées à condition d'être en **mode examen**.

Vous devez mettre votre calculatrice en mode examen devant le surveillant de salle, lorsqu'il vous le demande (généralement lors l'émargement de la feuille de présence).

pour les Casio	pour les Texas Instrument
calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : [cos], [7], [AC] puis suivre les instructions affichées.	calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : [AC], [enter], [ON]

À la mise en place du mode examen, une diode clignote à l'avant de la machine et un symbole s'affiche en haut de l'écran.

Si votre machine est déjà en mode examen, vous devez quand même effectuer la mise en mode examen devant le surveillant de salle.

Exercice 1 —

7 points

D'après Centres Étrangers, juin 2015,exercice 3

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice du nombre annuel d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel de 2001 à 2011, base 100 en 2001.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indice y_i	100	106,8	106,8	109,9	112,7	112,6	120,3	124,9	126,0	122,7	122,9

Source : d'après INSEE

Le nuage des points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i variant de 0 à 10 est donné en annexe, à rendre avec la copie.

1. a) Déterminer, à l'aide du tableau, le taux d'évolution du nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel entre 2001 et 2011 exprimé en pourcentage.

Par lecture des indices : le taux d'évolution est $I_{2011} - I_{2001} = 22{,}9$ soit une évolution de 22,9 %.

b) On sait que 1 268 milliers de voitures neuves équipées d'un moteur diesel ont été immatriculées en 2001. Calculer le nombre de voitures de ce type immatriculées en 2011. (Arrondir au millier le plus proche.)

Par lecture des indices, le nombre de voitures a été multiplié par 1,229, donc on trouve $1\,268 \times 1{,}229 \approx 1\,558$ milliers de voitures en 2011.

2. a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

À l'aide de la calculatrice on trouve : $y = 2{,}48x + 102{,}63$

b) On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 2{,}5x + 102{,}6$.
Tracer cette droite sur le graphique figurant en annexe.

On choisit deux points : si $x = 0$, on trouve $y = 10{,}6$ et si $x = 10$, on trouve $y = 127{,}6$

c) À l'aide de ce modèle, estimer les indices du nombre de voitures neuves équipées d'un moteur diesel immatriculées en 2012 et en 2013.

2012 correspond à l'indice 11 et 2013 correspond à l'indice 12.
Par lecture graphique (indiquer les « pointillés de lecture » ou par calcul, on trouve que

- l'indice en 2012 serait de 130 donc le nombre de voitures : $1\,268 \times 1{,}30 = 1\,648$ milliers ;
- l'indice en 2013 serait de 132 donc le nombre de voitures : $1\,268 \times 1{,}32 = 1\,674$ milliers.

3. Le tableau **en annexe** donne le nombre d'immatriculations de voitures neuves (exprimé en milliers) équipées d'un moteur diesel de 2009 à 2013.

a) Faut-il remettre en question l'estimation faite à la question **3.c** ?

Le modèle ne semble pas pertinent : le nombre d'immatriculation a diminué.

b) Si la tendance observée sur le tableau entre 2011 et 2013 se poursuit, combien de voitures neuves équipées d'un moteur diesel devront être immatriculées en 2015 ?
Expliquer la démarche entreprise.

On calcule le taux d'évolution entre 2011 et 2012, on trouve $\dfrac{1\,354{,}9 - 1\,558{,}2}{1\,558{,}2} \approx -0{,}13$
On calcule le taux d'évolution entre 2012 et 2013, on trouve $\dfrac{1\,182{,}2 - 1\,354{,}9}{1\,354{,}9} \approx -0{,}13$
On peut supposer que la baisse de 13% va continuer et donc prévoir qu'en 2014, le nombre de voitures sera $1\,182{,}2 \times (1 - 0{,}13) \approx 1\,028{,}5$;
puis qu'en 2015 il sera de $1\,028{,}5 \times (1 - 0{,}13) \approx 894{,}8$

Exercice 2 —

8 points

d'après BAC STMG, Polynésie, juin 2105, exercice 1

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour x ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :
$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \leqslant x \leqslant 30$.

1. a) Calculer le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.

$f(4) = 4^3 - 60 \times 4^2 + 900 \times 4 - 500 = 2\,204$ donc le bénéfice pour 4 ordinateurs est de 2 204 €.
$f(10) = 10^3 - 60 \times 10^2 + 900 \times 10 - 500 = 3\,500$ donc le bénéfice pour 10 ordinateurs est de 3 500 €.

b) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

on sait que la dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$ et que celle de $x \mapsto -60x^2 + 900x - 500$ est $x \mapsto -2 \times 60x + 900 = -120x + 900$
donc $f'(x) = 3x^2 + -120x + 900$

c) Dresser, après avoir étudié le signe de f', le tableau de variation de f.

f' est un polynôme du second degré, avec $a = 3$, $b = -120$ et $c = 900$.
Comme le coefficient de x^3 est positif, sa représentation graphique est une parabole orientée « vers le haut ».
$\Delta = b^2 - 4ac = (-120)^2 - 4 \times 3 \times 900 = 3\,600$
donc il existe deux valeurs qui annulent f' :
$\alpha = \dfrac{-(-120) - \sqrt{3\,600}}{2 \times 3} = 10$
et $\beta = \dfrac{-(-120) + \sqrt{3\,600}}{2 \times 3} = 30$

D'où le tableau de variations de f

x	0		10		30
signe de $f'(x)$		+	0	−	
variations de f	−500	↗	3 500	↘	−500

d) En déduire combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour pour avoir un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice.

il faut donc produire 10 ordinateurs pour avoir un bénéfice maximal de 3 500 €

2. La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous représente l'évolution du bénéfice en fonction du nombre d'ordinateurs fabriqués et vendus en une journée suivant le modèle choisi par l'entreprise.

a) Par lecture graphique, déterminer combien l'entreprise doit fabriquer et vendre d'ordinateurs en une journée si elle veut un bénéfice d'au moins 2 500 €.

On lit qu'il faut être dans l'intervalle [4,5 ; 16,75] donc fabriquer entre 5 et 16 ordinateurs.

b) Une grande surface veut acheter des ordinateurs. Elle propose au choix deux contrats à cette entreprise :

contrat A : acheter 300 ordinateurs à fabriquer en dix jours ;

contrat B : acheter 100 ordinateurs à fabriquer en cinq jours.

Quel contrat l'entreprise a-t-elle intérêt à choisir ? (Justifier votre réponse).

contrat A :300 ordinateurs en 10 jours, cela signifie en fabriquer 30 jour : le bénéfice est négatif !

contrat B :100 ordinateurs en 5 jours, cela signifie en fabriquer 20 jour : le bénéfice est positif : il faut choisir le contrat B.

Exercice 3 —

10 points

D'après Centres Étrangers, juin 2015, exercice 4

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $f(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72$

On a représenté en annexe la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

Partie A –

Dessiner les « pointillés de lecture » sur le graphique en annexe à rendre avec votre copie, puis répondre à la question par une phrase.

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
   On lit environ 90 milliers d'euros.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.
   On lit environ 4,75 tonnes de bouteilles.

Partie B –

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par :
$C_M(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M, notée C'_M. Vous admettrez que la dérivée f' de la fonction f est $f'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 20$

on a $C_M(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72}{x}$

donc C_M est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec

$u(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72$ $\quad u'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 20$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$$C'_M = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$= \frac{(1{,}5x^2 - 8x + 20) \times x - (0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72) \times 1}{x^2}$$
$$= \frac{1{,}5x^3 - 8x^2 + 20x - 0{,}5x^3 + 4x^2 - 20x - 72}{x^2}$$
$$= \frac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$$

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;10]$, $C'_M(x)$ peut s'écrire
$C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2 + 2x + 12\right)}{x^2}$

On développe l'expression proposée (attention on sait pas si elle est vraiment égale à $C'_M(x)$) :

$$A = \frac{(x-6)\left(x^2 + 2x + 12\right)}{x^2}$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 12x - 6x^2 - 12x - 72}{x^2}$$
$$= \frac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2} = C'_M(x)$$

3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$ pour x variant dans l'intervalle $]0;10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.

On cherche le signe de $\left(x^2+2x+12\right)$.

idée 1 Comme $0 \leqslant x \leqslant 10$, on a $2x \geqslant 0$, donc $x^2+2x+12 \geqslant 0$.

idée 2 On reconnaît un polynôme du second degré avec $a=1$, $b=2$ et $c=12$. comme $a>0$, la parabole est orientée « vers le haut ».

$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 12 = -44$

Comme $\Delta < 0$, le polynôme ne s'annule jamais, et comme $a>0$, il est toujours positif.

La seule expression qui peut changer de signe est $(x-6)$

D'où le tableau de variations :

x	0		6		10
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f		↘	26	↗	32,5

4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

À la lecture du tableau de variations, le coût moyen minimal est atteint pour 6 tonnes de bouteilles.

Partie C –

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $\mathrm{B}(x)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$ est :

$\mathrm{B}(x) = -0{,}5x^3+4x^2+20x-72$

Le bénéfice se calcule à l'aide de l'expression :

$\mathrm{B}(x) = \mathrm{R}(x) - \mathrm{C}(x)$ où $\mathrm{R}(x)$ représente la recette pour x tonnes de bouteilles.

Ici $\mathrm{R}(x) = 40x$, donc

$\mathrm{B}(x) = 40x - \left(0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72\right)$

$= -0{,}5x^3+4x^2+20x-72$

2. Calculer le bénéfice associé à une production de 7 tonnes.

pour 7 tonnes, on trouve un bénéfice $\mathrm{B}(7) = 92{,}5$

3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.

le coût moyen est minimal pour une production de 6 tonnes de bouteilles, il est alors de $\mathrm{B}(6) = 84$ milliers d'euros, donc moins important que pour 7 tonnes de bouteilles produites.

L'affirmation est fausse.

Exercice 4 —

9 points

d'après BAC Métropole, septembre 2015, exercice 1

Un conservatoire de musique propose deux parcours à ses élèves : un parcours diplômant et un parcours loisir. On observe que 40 % des élèves choisissent le parcours diplômant. Parmi ceux qui ont sélectionné le parcours diplômant, 30 % choisissent de faire partie d'un orchestre. Parmi les élèves ayant choisi le parcours loisir, 25 % choisissent de faire partie d'un orchestre.

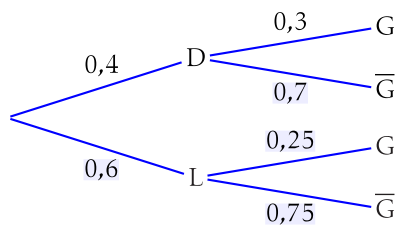
On sélectionne un élève de ce conservatoire au hasard.

On note :

- D l'événement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant. »
- L l'événement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours loisir. »
- G l'événement : « L'élève sélectionné a choisi de faire partie d'un orchestre. »

Partie A –

1. Compléter l'arbre de probabilité



2. Définir par une phrase l'événement $\mathrm{D}\cap\mathrm{G}$ et calculer sa probabilité.

$\mathrm{D}\cap\mathrm{G}$: « L'élève a choisi une formation diplômante et fait partie de l'orchestre. »

$p(\mathrm{D}\cap\mathrm{G}) = 0{,}4\times 0{,}3 = 0{,}12$

3. Déterminer la probabilité de l'événement G.

$p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{D}\cap\mathrm{G}) + p(\mathrm{L}\cap\mathrm{G})$

$p(\mathrm{G}) = 0{,}12 + 0{,}6\times 0{,}25 = 0{,}27$

4. On choisit au hasard un élève faisant partie d'un orchestre. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il suive un parcours diplômant ?

On cherche $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{G}\cap\mathrm{D})}{p(\mathrm{G})}$

$p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \dfrac{0{,}4\times 0{,}3}{0{,}27} = \dfrac{0{,}12}{0{,}27} \approx 0{,}444$

Partie B –

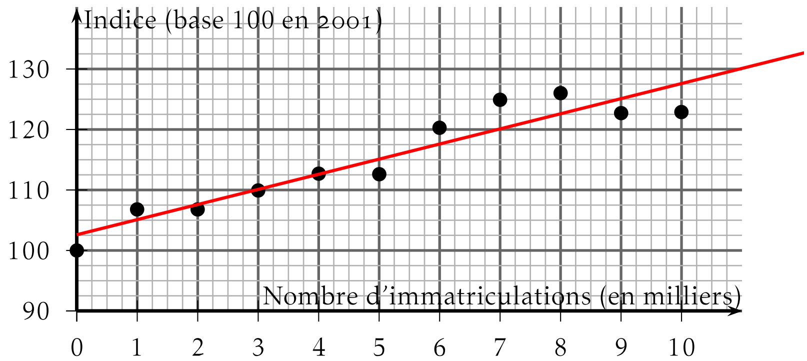
Pour le concert de fin d'année, l'auditorium du conservatoire dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre X de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.

On estime à 0,75 la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres 500 et 0,75.

1. Calculer l'espérance de X.
   Comme $X \sim \mathscr{B}(500; 0{,}75)$, on sait que $E(X) = 500 \times 0{,}75 = 375$.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant. On arrondira le résultat au millième.
   Le nombre places réservées est suffisant si le nombre de parents présents est inférieur à 400.
   On cherche $p(X \leqslant 400) \overset{\text{calc}}{=} 0{,}996$

Annexe

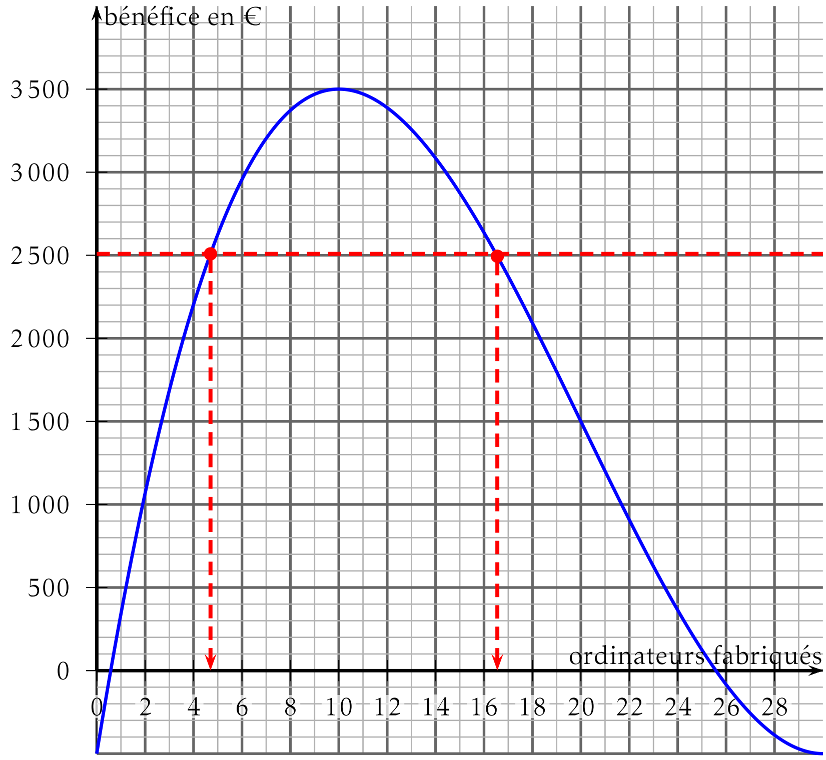
Exercice 1



Année	2009	2010	2011	2012	2013
Nombre d'immatriculations (en milliers)	1 597,7	1 555,4	1 558,2	1 354,9	1 182,2
Indice y_i, base 100 en 2001	126,0	122,7	122,9		

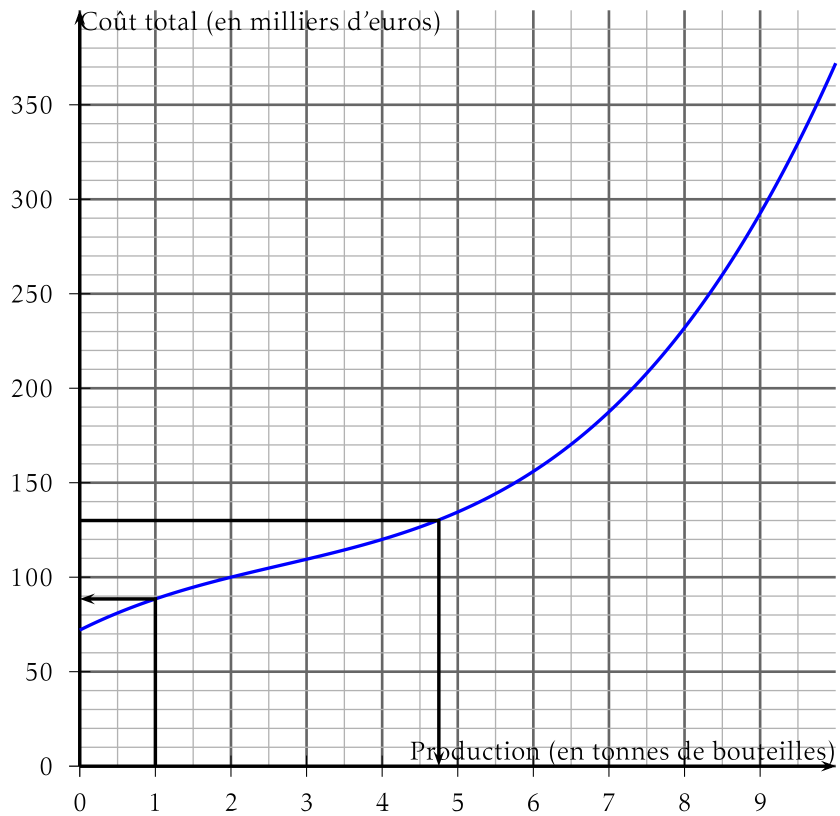
Exercice 1 : nombre d'immatriculations

Exercice 2



Exercice 2 : courbe du bénéfice

Exercice 3



Exercice 3 : Coût de production