Acquis 2nde

- Probabilité d'un événement
- Réunion et intersection de deux événements, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$
- Marches aléatoires
- Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité (arbres...)
- Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.

Attendus 1ere S

- Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues, représentation : arbres pondérés
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli
- Schéma de Bernoulli, loi binomiale, reconnaître les situations, calculer les probas, représenter la loi binomiale, utiliser l'espérance.
- Coefficients binomiaux, triangle de Pascal
- Espérance, variance, écart-type de la loi binomiale
- Simuler loi géométrique tronquée
- ▣ Démontrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Échantillonage : utilisation de la loi binomiale pour la prise de décision à partir d'une fréquence, intervalle de fluctuation.
- Exploiter l'intervalle de fluctuation pour prendre une décision.

LOI BINOMIALE ET ÉCHANTILLONNAGE

1. Épreuve et schéma de Bernoulli

► p 355 nº 32 : déterminer schéma - calculer $P(X \geqslant 1)$

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0 \leqslant p \leqslant 1$) est ⟨● une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) où p est la probabilité du succès. ●⟩

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est ⟨● la répétition identique et indépendantes de n épreuves de Bernoulli de paramètre p ●⟩.

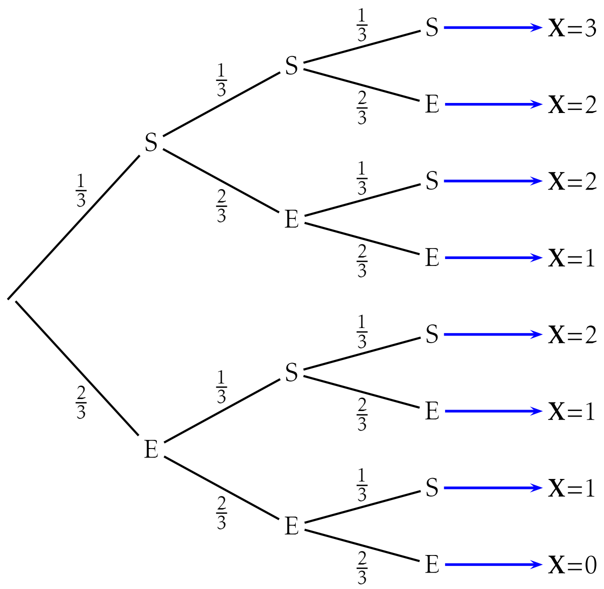
Exemple : On lance un dé cubique, bien équilibré, les faces sont numérotées de 1 à 6. Le *succès* est l'événement A : « Obtenir un multiple de 3 ».

L'univers est ⟨● $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A = \{3;6\}$. Chaque événement élémentaire étant équiprobable, $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ ●⟩

On en déduit la probabilité du succès : ⟨● $P(S) = \dfrac{1}{3}$ ●⟩, et donc celle de l'échec ⟨● $P(E) = \dfrac{2}{3}$ ●⟩.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès après 3 lancers.

Grâce à un arbre, on peut déduire la loi de probabilité de X.



⟨●

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$	$3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$	$3 \times \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{27}$

●⟩

2. Loi binomiale

2.1 Introduction

1. Quelles sont toutes les possibilités de placer 2 croix dans le tableau de trois cases ci-contre ? (un seul élément par case !) ?
2. Quelles sont toutes les possibilités de placer 3 croix dans le tableau de cinq cases ci-contre ? (un seul élément par case !) ?
3. Quelles sont toutes les possibilités de placer 2 ronds dans le tableau de cinq cases ci-contre ? (un seul élément par case !) ?

pour deux croix dans le tableau à trois cases : 3 possibilités. Il y a 10 possibilités à chaque fois.	Faire remarquer que placer 3 croix parmi 5 cases revient au même que placer 2 ronds parmi 5 cases.

2.2 Loi binomiale, coefficients binomiaux : définition

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès est la **loi binomiale de paramètres n et p**.

On note $X \sim \mathscr{B}(n\,;p)$

et on a $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

$\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial, il se lit « k parmi n » : c'est le ⟨• nombre •⟩ de façons de ranger k éléments éléments parmi n.

Si k est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli à n répétitions, $\binom{n}{k}$ peut s'interpréter comme le nombre de chemins de longueur n contenant k succès (ranger k lettres S dans un tableau de n cases).

► p 355 n° 34 : loi binomiale - lecture graphique - calculatrice - événement contraire

Exemple : avec l'exemple précédent : ⟨• $X \sim \mathscr{B}\left(3\,;\frac{1}{3}\right)$

et $\binom{3}{2} = 3$, on retrouve bien $P(X=2) = \binom{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$ •⟩

$\binom{3}{2}$ a été calculé dans l'intro.

2.3 Coefficients binomiaux

Propriétés

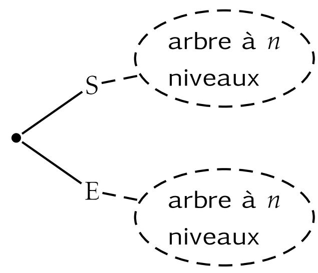
Par convention $\binom{0}{0} = 1$

Premières propriétés

Soit $X \sim \mathscr{B}(n\,;p)$, on remarque que

- il y a ⟨• 1 chemin de longueur n •⟩ menant à n succès, donc ⟨• $\binom{n}{n} = 1$ •⟩ ;

- il y a ⟨● 1 chemin de longueur n ●⟩ menant à 0 succès, donc ⟨● $\binom{n}{0} = 1$ ●⟩ ;
- choisir k succès dans un chemin de longueur n, revient à choisir $(n-k)$ échecs dans un chemin de longueur n, donc ⟨● $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ●⟩



Propriété d'addition

Soit $c = \binom{n+1}{k+1}$ le nombre de chemins de longueur $(n+1)$ avec $(k+1)$ succès.

Pour obtenir c, on peut commencer par un succès, ⟨● il faut donc ensuite obtenir tous les chemins de longueur n avec k succès, c'est à dire $\binom{n}{k}$;

ou bien on peut commencer par un échec, il faut donc ensuite obtenir tous les chemins de longueur n avec $(k+1)$ succès, c'est à dire $\binom{n}{k+1}$

donc $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ ●⟩

Calculs des coefficients binomiaux

	p								
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\binom{0}{0}=1$								
1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$							
2	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$						
3	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$					
4	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=4$	$\binom{4}{2}=6$	$\binom{4}{3}=4$	$\binom{4}{4}=1$				
5	$\binom{5}{0}=1$	$\binom{5}{1}=5$	$\binom{5}{2}=10$	$\binom{5}{3}=10$	$\binom{5}{4}=5$	$\binom{5}{5}=1$			
6	$\binom{6}{0}=1$	$\binom{6}{1}=6$	$\binom{6}{2}=15$	$\binom{6}{3}=25$	$\binom{6}{4}=15$	$\binom{6}{5}=6$	$\binom{6}{6}=1$		
7	$\binom{7}{0}=1$	$\binom{7}{1}=7$	$\binom{7}{2}=21$	$\binom{7}{3}=40$	$\binom{7}{4}=40$	$\binom{7}{5}=21$	$\binom{7}{6}=7$	$\binom{7}{7}=1$	
8	$\binom{8}{0}=1$	$\binom{8}{1}=8$	$\binom{8}{2}=28$	$\binom{8}{3}=61$	$\binom{8}{4}=80$	$\binom{8}{5}=61$	$\binom{8}{6}=28$	$\binom{8}{7}=8$	$\binom{8}{8}=1$

Triangle de Pascal, ligne 31 : multiples de 2 ; ligne 53 : multiples de 3 ; ligne 47 : multiples de 4 ; ligne 49 : multiples de 5
la somme des diagonales donne les termes de la suite de Fibonacci !

Propriétés « amusantes »

a) Compléter les lignes 4 à 14 du triangle de Pascal.

b) Effectuer la somme des nombres rencontrés sur chaque diagonale : émettre une conjecture.

c) Compléter les lignes 16 et suivantes avec le reste de la division euclidienne par 2 des coefficients binomiaux.

d) Colorier tous les coefficients pairs du triangle de Pascal.

2.4 Loi binomiale : espérance, variance

► p 355 nº 36 : au moins, au plus, moyenne
► p 358 nº 45 : au moins, au plus, moyenne, linéarité de $E(x)$

Soit $X \sim \mathscr{B}(n;p)$, on admet que

- l'espérance de X est $\langle \bullet\ E(X) = np\ \bullet \rangle$
- la variance de X est $\langle \bullet\ V(X) = np(1-p)\ \bullet \rangle$ et donc l'écart-type est $\langle \bullet\ \sigma(X) = \sqrt{(np(1-p)}\ \bullet \rangle$

3. Échantillon - fluctuation

Un ⟨● échantillon ●⟩ de taille n est obtenu à partir des résultats de n ⟨● répétitions indépendantes de la même expérience. ●⟩

exemple : on s'intéresse à la somme des points des faces supérieures de deux dés et on observe la réalisation de l'événement « la somme est supérieure ou égale à 7 ».

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

$p(\text{somme} \geqslant 7) = \dfrac{21}{36} \simeq 0{,}583$

Deux échantillons de même taille, issus de la même expérience, ne sont généralement pas identiques.

On appelle ⟨● fluctuation d'échantillonnage ●⟩ les variations de fréquences observées.

exemple : Si $n = 100$ cela signifie qu'on a lancé 100 fois les deux dés et qu'on a observé la fréquence de réalisation de l'événement « la somme est supérieure ou égale à 7 ».

Toutes les fréquences observées ne sont pas identiques.

Voici les 20 premières :

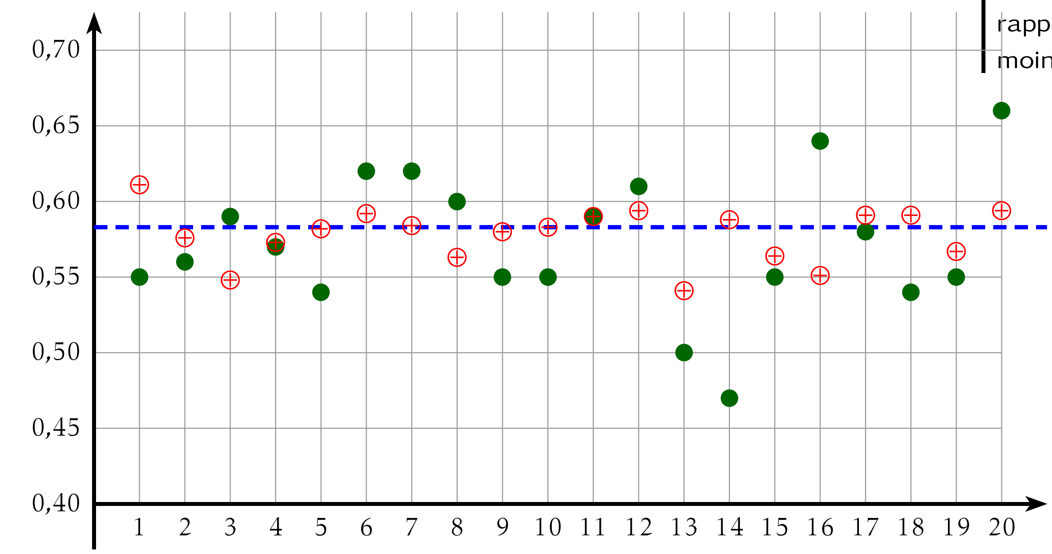
0,55 ; 0,56 ; 0,59 ; 0,57 ; 0,54 ; 0,62 ; 0,62 ; 0,6 ; 0,55 ; 0,55 ;
0,59 ; 0,61 ; 0,5 ; 0,47 ; 0,55 ; 0,64 ; 0,58 ; 0,54 ; 0,55 ; 0,66

Placer les points sur le graphique, remarquer les variations par rapport à la ligne théorique

Voici une série de 20 échantillons de taille $n = 1000$

0,611 ; 0,576 ; 0,548 ; 0,573 ; 0,582 ; 0,592 ; 0,584 ; 0,563 ; 0,578 ; 0,583 ;
0,59 ; 0,594 ; 0,541 ; 0,588 ; 0,564 ; 0,551 ; 0,591 ; 0,591 ; 0,567 ; 0,594

Placer les points sur le graphique, remarquer que les variations par rapport à la ligne théorique sont moins importantes



remarque : Plus la taille de l'échantillon augmente, plus les fréquences observées ⟨● se rapprochent de la fréquence théorique $p = \dfrac{7}{12} \simeq 0{,}583$ ●⟩

4. Intervalle de fluctuation - Prise de décision

4.1 Intervalle de fluctuation

On émet une hypothèse sur la valeur de la proportion p du caractère étudié. On considère donc p comme ⟨● connu ●⟩.

Un échantillon de de taille n est prélevé dans la population et on définit la variable aléatoire X qui représente ⟨● le nombre d'apparition du caractère dans l'échantillon ●⟩.

On peut donc calculer la ⟨● fréquence ●⟩ d'apparition du caractère dans cet échantillon ⟨● $F = \frac{X}{n}$ ●⟩.

Question : ⟨● Peut-on, à partir de la fréquence observée F, valider la conjecture (l'hypothèse) faite sur p ? ●⟩

Propriété : On détermine

- le ⟨● plus petit entier ●⟩ a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$
- le ⟨● plus petit entier ●⟩ b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$

⟨● L'intervalle de fluctuation de F au seuil de 95 % est $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ ●⟩.

4.2 Prise de décision

On ⟨● émet une hypothèse ●⟩ sur la proportion p d'un caractère dans la population.

On prélève au hasard, avec remise, un échantillon de taille n puis on observe la fréquence d'apparition f.

On détermine l'intervalle de fluctuation IF au seuil de 95% associé à la loi binomiale de paramètres n et p.

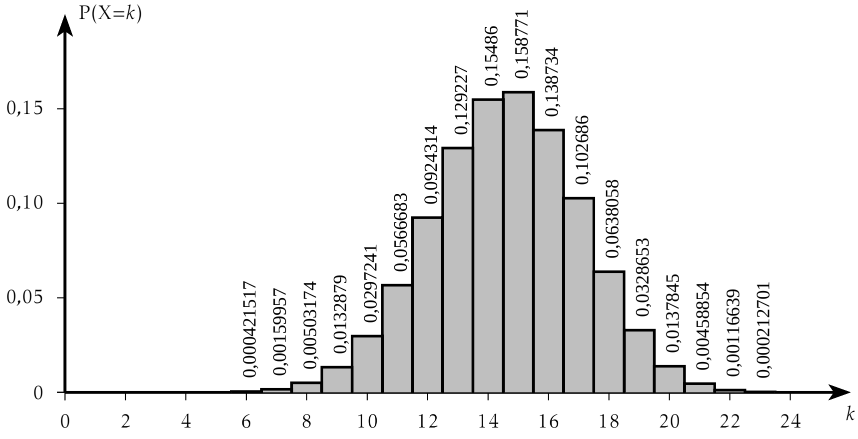
- ⟨● Si $f \in$ IF, alors on accepte l'hypothèse ●⟩ ;
- ⟨● Si $f \notin$ IF, alors on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur inférieur à 5 % ●⟩

Exemple : lancers de dés Parmi 25 couples de lancers de dés, la somme

On lance 1 000 fois deux dés et on observe la fréquence du caractère « la somme des points est supérieure ou égale à 7 ».

N	25
p	0,583
k	$P(X <= k)$
0	$3{,}12 \cdot 10^{-10}$
1	$1{,}12 \cdot 10^{-08}$
2	$1{,}94 \cdot 10^{-07}$
3	$2{,}16 \cdot 10^{-06}$
4	$1{,}73 \cdot 10^{-05}$
5	0,000 107
6	0,000 523
7	0,002 106
8	0,007 093
9	0,020 279
10	0,049 817
11	0,106 208
12	0,198 313
13	0,327 260
14	0,481 997
15	0,640 860
16	0,779 865
17	0,882 892
18	0,946 998
19	0,980 063
20	0,993 950
21	0,998 579
22	0,999 758
23	0,999 973
24	0,999 998
25	1

des points est supérieure à 7 dans 42 % des cas. On fait l'hypothèse que ce résultat est dû au hasard.



On suppose que $p = \dfrac{7}{12}$ et $n = 25$, donc $X \sim \mathscr{B}(25\,;\frac{7}{12})$

On a $f = 0{,}42$.

On trouve $a = 10$ et $b = 19$, donc $IF = \left[\dfrac{10}{25}\,;\dfrac{19}{25}\right] = [0{,}4\,;0{,}76]$

donc $f \in IF$. On accepte l'hypothèse que le résultat est dû au hasard.

Exemple : Aamjiwnaag

Entre 1999 et 2003, 132 enfants sont nés dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada. Sur ces 132 naissances, il y a eu 46 garçons.
https://fr-ca.facebook.com/AamjiwnaangEnvironment
http://aamjiwnaangsolidarity.com/

⟨● On fait l'hypothèse « si les naissances sont dues au hasard, il y a une une proportion $p = 0{,}5$ de garçons dans l'échantillon » ;

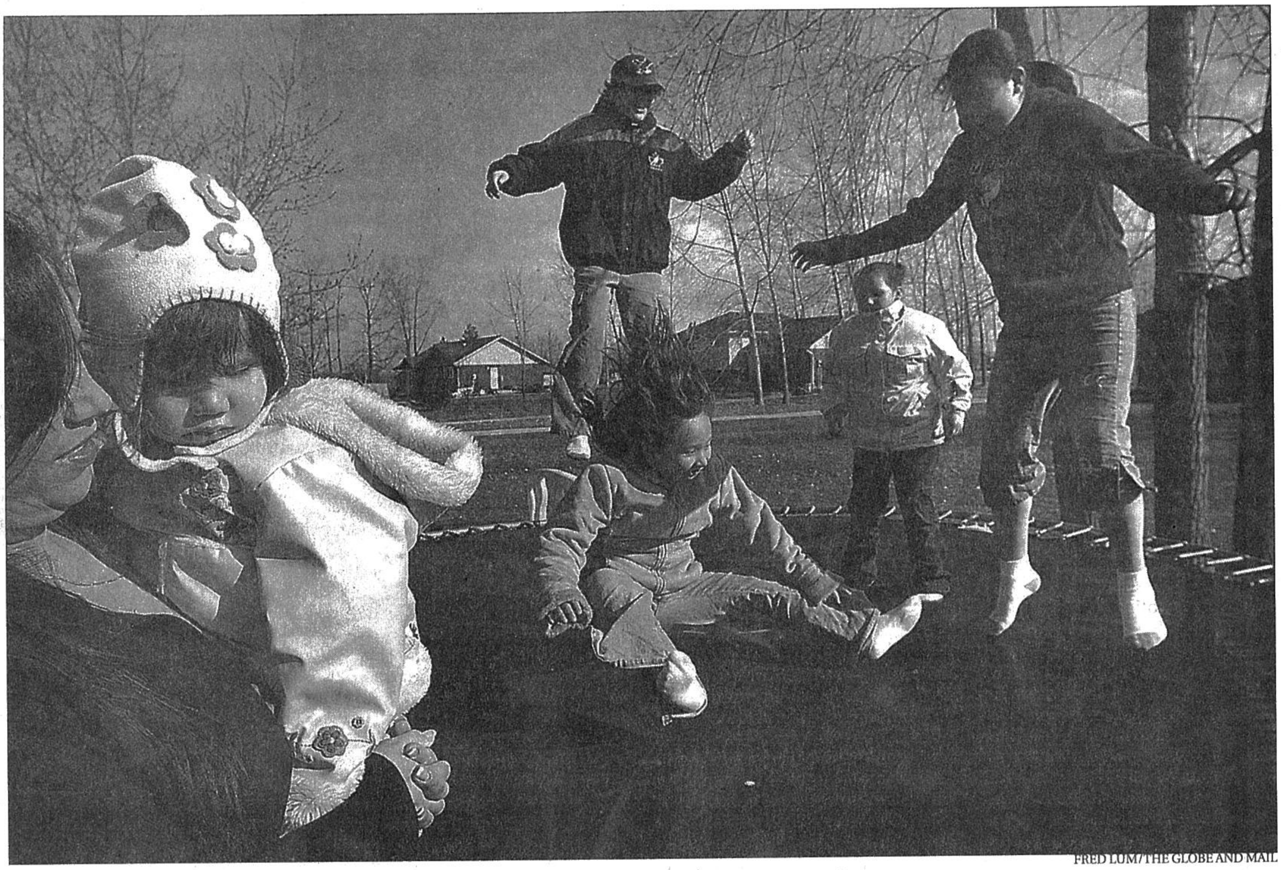
L'échantillon est de taille $n = 132$.

Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de garçons, $X \sim \mathscr{B}(132, 0{,}5)$

La fréquence observée est $f = \dfrac{46}{132} \simeq 0{,}348$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :
IF = [;] =.

donc $f \notin IF$. On rejette l'hypothèse « la probabilité qu'un nouveau né soit un garçon est de 0,5 » ●⟩



FRED LUM/THE GLOBE AND MAIL

Lisa Joseph stands with her five children outside their home on the Aamjiwnaang First Nation Reserve near Sarnia, Ont., yesterday. Surrounded by petrochemical plants, the reserve is said to have the world's most skewed sex ratio, with nearly twice as many girls being born as boys.

ENVIRONMENTAL HEALTH

The mystery of the missing boys

Chemical pollutants flagged in new study as possible factor in skewed sex ratio

BY MARTIN MITTELSTAEDT
ENVIRONMENT REPORTER

Where are all the missing boys?

It is a question posed by a new study that has found the proportion of boys born over the past three decades has unexpectedly dropped in both the United States and Japan. In all, more than a quarter of a million boys are missing, compared to what would have been expected had the sex ratio existing in 1970 remained unchanged.

The study also says the world's most skewed sex ratio is in Canada, in a native community surrounded by petrochemical plants in Sarnia, Ont., where the number of boys born has plunged since the mid-1990s at a rate never seen.

Although the researchers do not know why boys are taking a hit, they suspect contributing causes could include widespread exposure to hormone-mimicking pollutants by women during pregnancy and by men before they help conceive children.

"We hypothesize that the decline in sex ratio in industrial countries may be due, in part, to prenatal exposure to metalloestrogens and other endocrine disrupting chemicals," said the study, issued this week in Environmental Health Perspectives, a peer reviewed journal of the U.S. National Institute of Environmental Health Sciences.

These types of chemicals include some pesticides, dioxin and methylmercury, a pollutant from coal-fired power plants and many industrial sources commonly found in seafood.

The study also flagged a host of other possible factors, including rising obesity rates, older parental age, growing stress levels, and the increasing number of children being conceived using fertility aides. Other research has shown some associations between these factors and a drop in boy births.

The study was conducted by researchers in both the U.S. and Japan, and led by Devra Lee Davis, a prominent epidemiologist and director of the Center for Environmental Oncology at the University of Pittsburgh Cancer Institute.

In an interview, Dr. Davis said that although the cause of the decline isn't known, it could be linked to the increasing number of other male reproductive problems, such as falling sperm counts and rising testicular cancer rates.

She said that males during fetal development may be more sensitive to pollutants that mimic hormones, leading to increased fetal deaths and reproductive problems later for the surviving males.

The situation in Sarnia, where nearly twice as many girls are being born than boys on the Aamjiwnaang First Nation, is internationally significant, according to the study. "To our knowledge, this is a more significantly reduced sex ratio and greater rate of change than has been reported previously anywhere," it said.

The reserve is located in the heart of Sarnia's chemical valley, and the native community, along with researchers at the University of Rochester and the Occupational Health Clinics for Ontario Workers, are trying to find the cause of the unusual sex ratio.

Fewer boys than expected are being born in the non-aboriginal community downwind of the petrochemical plants in the area, but not to the same degree as on the reserve. The work force in Sarnia has not been studied, something that would shed light on whether pollutants are the cause.

Researchers in many countries have been reporting a drop in the ratio of boys to girls being born over the past few decades.

It is considered normal in a large population for the number of baby boys to slightly outnumber girls, by a proportion of about 105 males to 100 females. It is widely thought that more boy births are a way nature compensates for higher rates of male mortality.

But the ratio has not been static in industrialized countries, and researchers suspect that increasing numbers of male fetuses are being miscarried, a kind of sex-based culling in the womb.

In Japan, the sex ratio fluctuated with no trend from 1949 to 1970, but then declined steadily to 1999, the end of the study period there.

The decline in the number of boys in Japan equals 37 out of every 10,000 births.

In the U.S., the sex ratio also declined from 1970 to 2002. The drop in the number of boys equals 17 out of every 10,000 births.

The U.S. change was concentrated among whites. There was almost no change among blacks.

	1	1	2	3																												
1																																
1	1																															
1	2	1																														
1	3	3	1																													
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1																	
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																
1																																