Acquis 2nde

- Probabilité d'un événement
- Réunion et intersection de deux événements, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$
- Marches aléatoires
- Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité (arbres...)
- Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.

Attendus 1ere S

- Justifier des faits observés expérimentalement à l'aide de modélisation de situations aléatoire utilisant les notions de loi de probabilités et de variables aléatoires.
- Utiliser des arbres pondérés.

- Variable aléatoire discrète et loi de probabilité, Déterminer, exploiter la loi d'une v.a.
- Espérance, variance et écart-type
- ▣ Démontrer les formules : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2V(X)$

PROBABILITÉS

Introduction

$\langle\bullet\bullet\rangle$

On lance six dés cubiques bien équilibrés, les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6.

On calcule la différence en valeur absolue entre le nombre de faces paires et le nombre de faces impaires.

- quelles sont les valeurs possibles pour cette différence ?
- quelles sont les probabilités associées ?
- modéliser l'obtention d'une face paire / impaire. $\langle\bullet\ \bullet\rangle$

$\langle\bullet\bullet\rangle$

introduire ensuite le vocabulaire *variable aléatoires* et *loi d'une v.a.*
Il faut que l'emploi d'un logiciel soit justifié : si on peut répondre rapidement à l'aide d'un arbre ou d'un tableau, pourquoi modéliser ?

rappeler la formule `ENT(2*ALEA())`

Soit n le nombre de faces paires, alors il y a $(6-n)$ faces impaires.
$\Delta = |n-(6-n)| = 2|3-n|$: on en déduit que la différence est toujours paire.
Comme $n \in [\![0;6]\!]$, on trouve $\Delta = \{0;2;4;6\}$

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

1.1 Variable aléatoire discrète

Soit Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire : Ω est l'ensemble des issues possibles pour cette expérience.

Une *variable aléatoire* est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Cette variable est souvent appelée X.

exemple d'introduction : $\langle\bullet$ Posons p pour une face paire et i pour une face impaire.

$\Omega = \{(p;p;p;p;p;p);(p;p;p;p;p;i);(p;p;p;p;i;i);(p;p;p;i;i;i);(p;p;i;i;i;i);(p;i;i;i;i;i);(i;i;i;i;i;i)\}$

Soit X la variable aléatoire qui a chaque issue associe la valeur absolue de la différence entre le nombre de faces paires et le nombre de faces impaires.

on a donc $X((p;p;p;p;p;p)) = 6;, X((p;p;p;p;p;i)) = 4; X((p;p;p;p;i;i)) = 2; X((p;p;p;i;i;i)) = 0; X((p;p;i;i;i;i)) = 2; X((p;i;i;i;i;i)) = 4; X((i;i;i;i;i;i)) = 6$

X prend donc les valeurs $\{0;2;4;6\}$. $\bullet\rangle$

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit Ω l'univers sur lequel on définit une loi de probabilité P. Soit X une v.a. sur Ω qui prend les valeurs $\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$.

▶ p 324 nº 19 : reconnaître loi de proba
▶ p 324 nº 20 : déterminer loi de proba

Définir la loi de probabilité de X c'est donner la valeur de $P(X = x_i)$ pour i de 1 à n.

remarque : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $0 \leqslant P(X = x_i) \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

exemple d'introduction :

Expérimentalement, on trouve

valeur x_i prise par X	0	2	4	6
$P(X = x_i)$	0,333	0,457	0,175	0,035

on démontrera plus tard que :

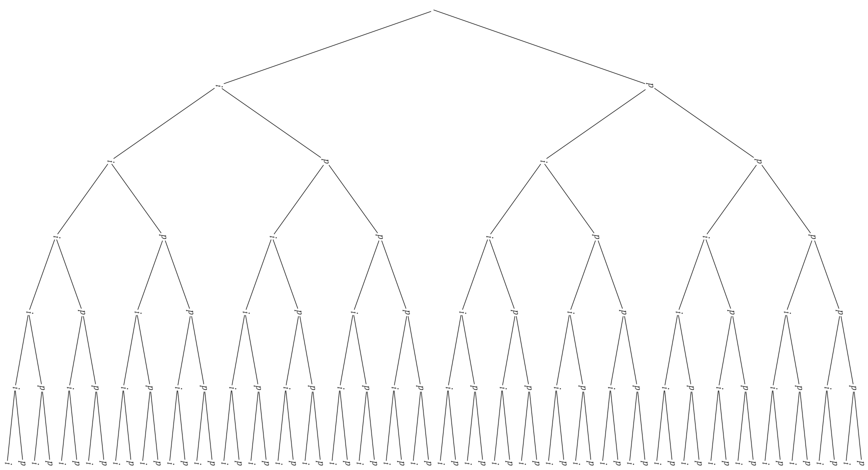
valeur x_i prise par X	0	2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

1.3 Représentation

► p 325 n° 22 : arbre + déterminer loi de proba

On peut s'aider de représentation à l'aide de tableaux ou d'arbres pondérés.

Ici p représente une face paire et i représente une face impaire.



ici on en n'indique pas le poids sur les branches, puisqu'il y a **équiprobabilité !**

2. Espérance, variance, écart-type

2.1 Définitions

Soit X une v.a. prenant n valeurs : $x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n$ de probabilités respectives : $p_1\,;p_2\,;\ldots\,;p_n$

- L'espérance de X est le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$
- La variance de X est le nombre $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2$
- L'écart-type de X est le nombre $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

► p 326 n° 25 : calcul $E(X), V(X), \sigma_X$

► p 326 n° 30 : calcul proba pour obtenir E(X)

► p 327 n° 38 : calcul proba pour obtenir E(X)

► p 329 n° 39 : calcul mise pour obtenir E(X)

Exemple d'introduction

Nous savons que la loi de X est donnée par :

valeur x_i prise par X	0	2	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

On peut donc calculer E(X) et σ_X

$\langle\bullet$ $E(X) = 0\times\frac{5}{16} + 2\times\frac{15}{32} + 4\times\frac{3}{16} + 6\times\frac{1}{32} = \frac{60}{32} = 1{,}875$

$\sigma_X = \frac{\sqrt{159}}{8} \approx 1{,}57$ $\bullet\rangle$

2.2 Propriétés

Soit X une v.a. et deux réels a et b, alors :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X)$$

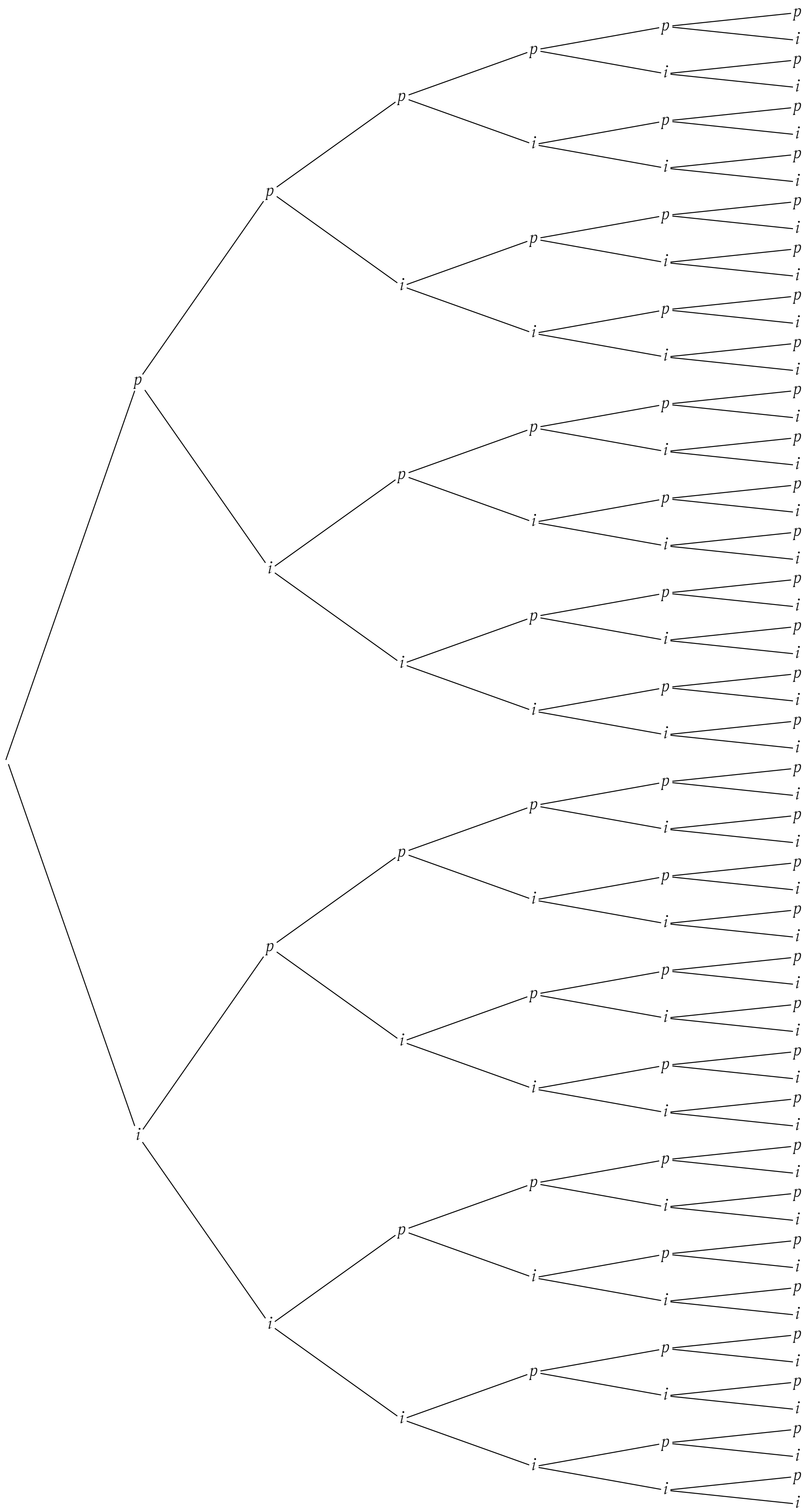
Démonstrations à savoir refaire

Soit X une v.a. prenant n valeurs : $x_1\,;x_2\,;\dots\,;x_n$ de probabilités respectives : $p_1\,;p_2\,;\dots\,;p_n$

Pour tout a et b réels, on défini la v.a. $Y = aX+b$, donc les n valeurs prises par Y sont $\langle\bullet$ $ax_1+b\,;ax_2+b\,;\dots\,;ax_n+b$ $\bullet\rangle$ de probabilités respectives : $p_1\,;p_2\,;\dots\,;p_n$

$\langle\bullet$ $E(Y) = E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,ax_i + b\times\sum_{i=1}^{n} p_i = a\times\sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i + b\times 1 = aE(X)+b$

$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(y_i - E(Y))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(ax_i+b-aE(X)-b)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(ax_i - aE(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} a^2\,p_i\,(x_i-E(X))^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i-E(X))^2 = a^2V(X)$ $\bullet\rangle$


p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i
p
i