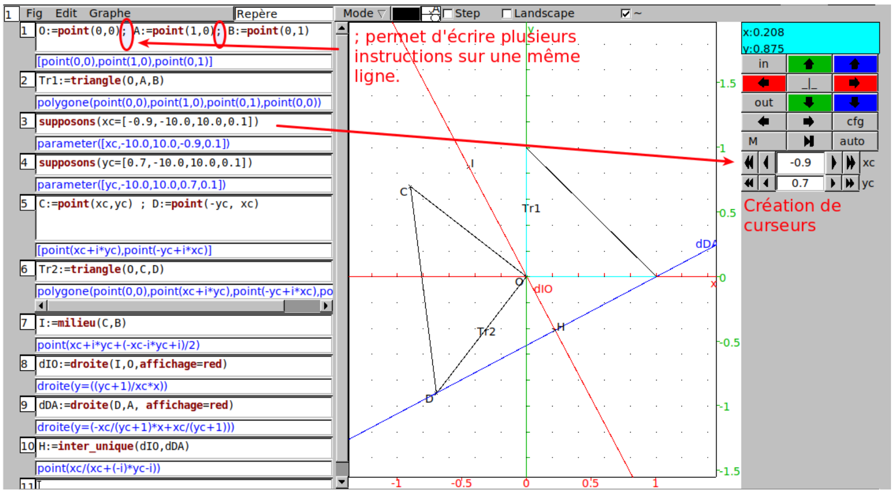
## Attendus 1ere S

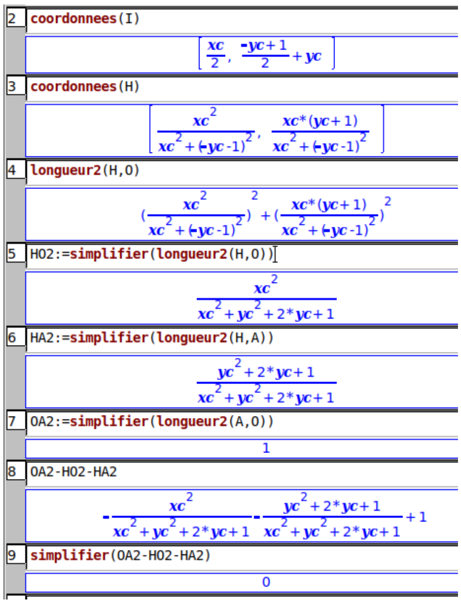
- Définition - propriétés : Calculer un produit scalaire (projection orthogonale, analytiquement, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide des normes)
- Vecteur normal à une droite
- Applications (calculs d'angles, de longueur, addition et duplication des cosinus et sinus
  ▣$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- ▣théorème de la médiane, équation d'un cercle
- Équation cartésienne d'une droite $\leftrightarrow$ vecteur normal

# PRODUIT SCALAIRE

## Introduction

OAB et OCD, sont deux triangles *directs* rectangles isocèles en O. I est le milieu de [CD] : quelle est la position relative des droites (OI) et (AD) ?




## 1. Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différents du vecteur nul, le ⟨● nombre $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ ●⟩ est appelé le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  Il se note ⟨● $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ●⟩.
- Si l'un des vecteurs est nul, on pose ⟨● $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ●⟩

Exercices ▶ ①

① exercices

▶ n$^{os}$ 24 - 25 - 26 : application de définition

## 2. Propriétés algébriques

pour tous vecteurs du plan $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel $k$ :

**symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ⟨● $\vec{v} \cdot \vec{u}$ ●⟩ ②

**linéarité** (admis) :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$ ⟨● $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ ●⟩
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) =$ ⟨● $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ ●⟩

②à démontrer en rappelant que si $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ alors $(\vec{u}, \vec{v}) = -\alpha$ et $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

Exercices ▶ ③

③ exercices

▶ n$^{o}$ 66 question 1 : règles de calcul

### 2.1 Application : identités remarquables

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=$ ⟨● $\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u},\vec{u})$
  $=\|\vec{u}\|^2\times\cos(0)=\|\vec{u}\|^2$ ●⟩
  par **convention** on note ⟨● $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$ ●⟩ ④
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=$ ⟨● $(\vec{u}+\vec{v})^2$
  $=(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v}$
  $=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
  $=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ ●⟩
- On démontre de même que :
  ⟨● $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
  ●⟩

Exercices ► ⑤

④penser à bien insister sur la symétrie et le développement au fur et à mesure - insister sur la *notation* puissance

⑤ exercices

► article sur Cédric Villani

### 2.2 Définition avec projeté orthogonal

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ⟨● $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HC}\right)$ ●⟩

or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HC}\right)=$ ⟨● $\frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HC}\right)=0$ ●⟩

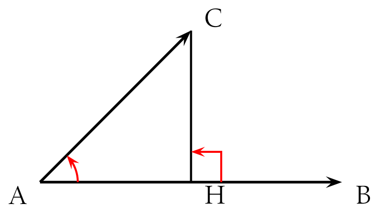
on en déduit que ⟨● $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ ●⟩

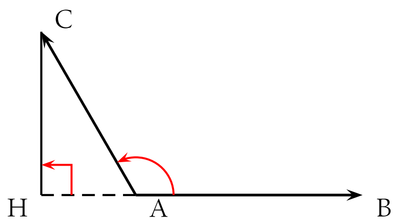
**Autre définition**

En posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, et H projeté orthogonal de C sur (AB), on a

⟨● $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ ●⟩

Exercices ► ⑥




⑥ exercices

► n° 59 : à faire avec des projetés orthogonaux

► n° 32 : règles de calcul et projetés

### 2.3 Définition avec les normes

D'après les propriétés précédentes :

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=$ ⟨● $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

d'où $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ ●⟩⑦

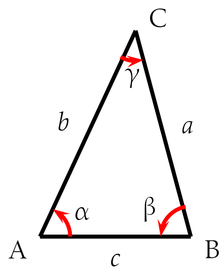
On peut démontrer de même que

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

⑦remarque : on retrouve la réciproque du théorème de Pythagore !

### 2.4 Théorème d'Al-Kashi

En appliquant ce qui précède à la figure suivante :




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \langle\bullet\ \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)\ \bullet\rangle$

mais on a aussi : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$\langle\bullet = c\times b\times\cos\alpha\ \bullet\rangle$

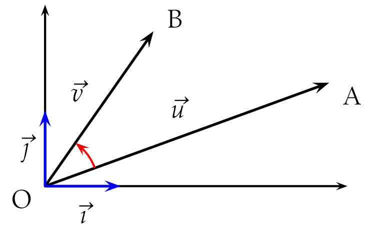
d'où : $\langle\bullet\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\ \bullet\rangle$ ⑧

⑧faire remarquer que c'est une généralisation du théorème de Pythagore !

on trouve de la même façon :

$\langle\bullet\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta\ \bullet\rangle$
$\langle\bullet\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\ \bullet\rangle$

## 3. Dans un repère orthonormé




Dans le repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$.

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On a donc $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \langle\bullet\ x_A^2+y_A^2\ \bullet\rangle$ ; $\left\|\vec{v}\right\|^2 = \langle\bullet\ x_B^2+y_B^2\ \bullet\rangle$ et $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \langle\bullet\ (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\ \bullet\rangle$

On en déduit que :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle\bullet\ \frac{1}{2}\left((x_A^2+y_A^2)+(x_B^2+y_B^2)-\left((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\right)\right)$

$=\frac{1}{2}(2x_Bx_A+2y_By_A)$

$=x_Ax_B+y_Ay_B\ \bullet\rangle$

### 3.1 Définition avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,

alors $\langle\bullet\ \vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\ \bullet\rangle$

### Propriété

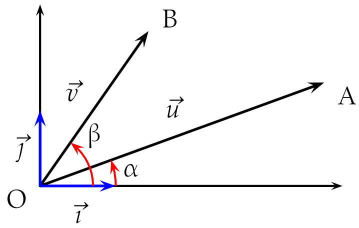
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les vecteurs sont ⟨● orthogonaux ●⟩ si et seulement si ⟨● $x x' + y y' = 0$ ●⟩

Exercices ▶ ⑨

| ⑨ exercices
▶ nº 84 : vecteurs orthogonaux
▶ nº 83 : déterminer si un triangle est rectangle

## 3.2 Application : trigonométrie




Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, les points A et B ont pour coordonnées respectives $\left(\left\|\vec{u}\right\|\cos(\alpha)\,;\left\|\vec{u}\right\|\sin(\alpha)\right)$ et $\left(\left\|\vec{v}\right\|\cos(\beta)\,;\left\|\vec{v}\right\|\sin(\beta)\right)$.

on sait que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

⟨● $= \vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\beta-\alpha) = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\alpha-\beta)$ ●⟩

et avec les coordonnées :

$\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ⟨● $\left\|\vec{u}\right\|\cos(\alpha) \times \left\|\vec{v}\right\|\cos(\beta) + \left\|\vec{u}\right\|\sin(\alpha) \times \left\|\vec{v}\right\|\sin(\beta)$
$= \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \left(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\right)$

On en déduit que : $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ ●⟩

On en déduit les formules :

- $\cos(\alpha-\beta) =$ ⟨● $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ ●⟩
- $\sin(\alpha+\beta) =$ ⟨● $\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ ●⟩
- $\sin(\alpha-\beta) =$ ⟨● $\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ ●⟩

⑩ Exercices ▶ ⑪

| ⑩ valeur exacte de $\dfrac{7\pi}{12}$

| ⑪ exercices
▶ démontrer les propriétés des angles associés avec $\dfrac{\pi}{2}$

## 3.3 Application : vecteur normal à une droite

Sot $(d)$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Nous savons que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{-b}{a}$ est un vecteur *directeur* de la droite $(d)$.

Une vecteur *normal* à la droite $(d)$ est un vecteur $\vec{n}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ sont proportionnelles à $\binom{a}{b}$.

**exemple :** Soit $(d) : 3x - 2y + 3$, $\vec{u}$ ⟨● $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ●⟩ et $\vec{n}$ ⟨● $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ●⟩

Exercices ► 12

| 12 exercices

► pliage

## 3.4 Application : équation d'un cercle

Le cercle de diamètre [AB] peut être défini comme l'ensemble des points M tels que MAB soit un triangle rectangle en M.

C'est à dire tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

on a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_A - x \\ y_A - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y)$

L'équation du cercle de diamètre [AB] est donc : $(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$

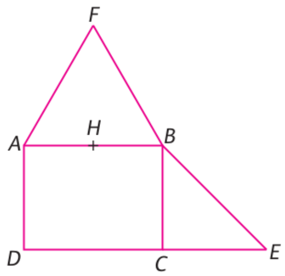
Remarque : si on développe l'expression précédente :
$x^2 - (x_A + x_B)x + y^2 - (y_A + y_B)y + (x_A x_B + y_A y_B) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Attention : toute équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ n'est pas une équation de cercle !

**exemple :** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 16 = 0$ ⟨● $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 + 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = -3$ ●⟩

## 4. Exercices du Déclic 1ere S

*Pour les exercices* **24** *à* **26**, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. Le triangle $ABF$ est équilatéral et le triangle $BCE$ est rectangle et isocèle en $C$.
$H$ est le milieu de $[AB]$.




**24** Calculer les produits scalaires :

**a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ **c.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$

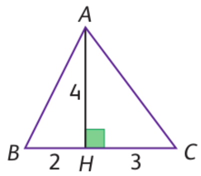
**25** Calculer les produits scalaires :

**a.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE}$ **b.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF}$ **c.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$

**26** Calculer les produits scalaires :

**a.** $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA}$ **b.** $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}$ **c.** $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA}$

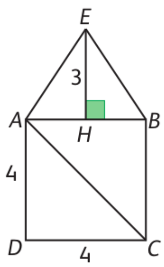
**66** On considère la figure ci-contre, avec $AH = 4$, $BH = 2$ et $CH = 3$.




**1.** En utilisant la relation
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$,
calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**2.** Retrouver le résultat en utilisant un repère orthonormé d'origine $H$.

**32** Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 4 cm et $AEB$ est isocèle en $E$ tel que $EH = 3$ cm.



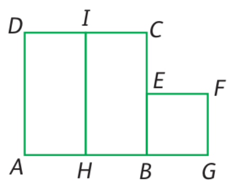

**1. a.** Justifier que :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HE}$

**b.** En déduire la valeur exacte de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$.

**2.** Calculer $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le mercredi 8 décembre 2010, LE PROGRES.fr consacre un article à Cédric Villani sous le titre *Comment Cedric est devenu génie des maths* « C'était au lycée je crois. Le jour où j'ai appris que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme était égale à la somme des carrés des deux longueurs… Je me suis dit, c'est magnifique ! ».

**59** Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 10.
Les points $E$, $I$ et $H$ sont des milieux des côté de $ABCD$.
$BEFG$ est un carré.
Calculer les produits scalaires :




**a.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FE}$ **b.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ **c.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DG}$

**d.** $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FG}$ **e.** $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{HF}$ **f.** $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC}$

**83** Soient trois points $A$, $B$ et $C$ du plan.
Préciser dans chaque cas si le triangle $ABC$ est rectangle.

**a.** $A(2\,;5)$, $B(1\,;2)$ et $C(10\,;-1)$

**b.** $A(5\,;4)$, $B(2\,;5)$ et $C(4\,;-1)$

**c.** $A(-1\,;4)$, $B(0\,;-4)$ et $C(3\,;2)$

**84** Déterminer les valeurs du réel $m$ pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\2+m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2+m\\1+m\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

**85** Déterminer les valeurs du réel $m$ pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}m-2\\m+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m+2\\m-2\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.