C02

Dans tout le contrôle, j et m représentent respectivement le numéro de votre jour et de votre mois de naissance. *Ne pas faire les calculs avec j et m, mais avec leur valeur !*

Exercice 1 — Calculs

5 points

Écrire les expressions suivantes sous forme d'un produit de facteurs.

$f(x) = x^2 - 2jx - m$ $\qquad$ $g(x) = 2x^2 + (5-m)x - \dfrac{5}{2}m$

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^2 - 2jx - m\\
&= (x-j)^2 - j^2 - m\\
&= (x-j)^2 - (j^2 + m)\\
&= \left(x - j - \sqrt{j^2+m}\right)\left(x - j + \sqrt{j^2+m}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g(x) = 2x^2 + (5-m)x - \frac{5}{2}m\\
&= 2\left(x^2 + \frac{5-m}{2}x - \frac{5}{4}m\right)\\
&= 2\left(x^2 + 2\times\frac{5-m}{2\times 2}x + \left(\frac{5-m}{2\times 2}\right)^2 - \left(\frac{5-m}{2\times 2}\right)^2 - \frac{5}{4}m\right)\\
&= 2\left(\left(x + \frac{5-m}{4}\right)^2 - \left(\frac{(5-m)^2}{16} + \frac{20m}{16}\right)\right)\\
&= 2\left(\left(x + \frac{5-m}{4}\right)^2 - \frac{m^2+10m+25}{16}\right)\\
&= 2\left(\left(x + \frac{5-m}{4}\right)^2 - \frac{(m+5)^2}{16}\right)\\
&= 2\left(x + \frac{5-m}{4} - \frac{m+5}{4}\right)\left(x + \frac{5-m}{4} + \frac{m+5}{4}\right)\\
&= 2\left(x - \frac{m}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 — Lieu de points *7 points*

Une certaine année, la « question du lundi » a été : « Quel est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $|x|+\left|y\right|=1$? »

Ayant bien travaillé les lundis précédents, Arnufle et Barnabé décident d'appliquer les méthodes déjà vues.

1. Ils travaillent par essais-erreurs avec les coordonnées des points $M_1(-0,5\,;0,5)$, $M_2(-1\,;-1)$, $M_3(0\,;-1)$ et $M_4\left(1-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$.

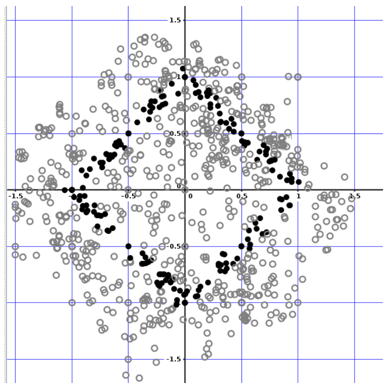
Écrire les calculs effectués pour chacun des points, puis conclure.

point	équation	point solution ?
M_1	$\lvert -0,5\rvert + \lvert 0,5\rvert = 0,5+0,5=1$	oui
M_2	$\lvert -1\rvert + \lvert -1\rvert = 1+1=2$	non
M_3	$\lvert 0\rvert + \lvert -1\rvert = 0+1=1$	oui
M_4	$\left\lvert 1-\sqrt{2}\right\rvert + \left\lvert\sqrt{2}\right\rvert = -\left(1-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1$	non

2. Comme ils ne peuvent pas tester toutes les coordonnées (!), ils utilisent GeoGebra et définissent un aspect dynamique pour le point M, sélectionnent l'activation de la trace et se défoulent…

Le repère est orthonormé, la grille va de 0,5 en 0,5 ; si les coordonnées des points vérifient l'équation ces derniers deviennent des ronds noirs, sinon ils deviennent des petits cercles gris.

Écrire en français la condition d'affichage des points.



la condition d'affichage est : `SI` $\left|\,|x|+\left|y\right|-1\right|<0,1$,
`ALORS` affiche un rond noir
`SINON` affiche un petit cercle gris

3. Quel semble être l'ensemble de points obtenu ?
Il semble que les points M décrivent le carré de sommets $(1\,;0),(0\,;1),(-1\,;0),(0\,;-1)$

4. Pour démontrer leur conjecture, Arnufle et Barnabé utilisent le tableau suivant pour écrire l'équation sans les valeurs absolues. Le compléter sur l'énoncé et interpréter rapidement les résultat obtenus.

	si $x < 0$	si $x \geqslant 0$
et si $y < 0$	(*)	
et si $y \geqslant 0$		

(*) dans cette case : si $x < 0$ et si $y < 0$ alors l'équation $|x| + |y| = 1$ s'écrit...

	si $x < 0$	si $x \geqslant 0$
et si $y < 0$	$-x - y = 1$ $\Leftrightarrow y = -x - 1$	$x - y = 1$ $\Leftrightarrow y = x - 1$
et si $y \geqslant 0$	$-x + y = 1$ $\Leftrightarrow y = x + 1$	$x + y = 1$ $\Leftrightarrow y = -x + 1$

Donc l'ensemble solution est composé de quatre segments de droites qui forment le carré.

Exercice 3 — Variations de fonction *8 points*

1. Suite à une mystérieuse histoire de fantôme jouant avec un drone, Arnufle doit étudier les variations de la fonction suivante (définie sur $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = \frac{1}{j + (x - m)^2}$$

   a) Déterminer les variations de cette fonction à l'aide de votre calculatrice. Expliquer votre démarche.

   b) Déterminer les variations de cette fonction en utilisant vos connaissances sur les variations des fonctions de références. Expliquer votre démarche.

la fonction $x \mapsto j+(x-m)^2$ a pour représentation graphique celle de $x \mapsto x^2$ translatée par le vecteur $(m;j)$: on en déduit :

x	$-\infty$ $\qquad$ m $\qquad$ $+\infty$
variations de $x \mapsto j+(x-m)^2$	$\searrow$ $\quad$ j $\quad$ $\nearrow$

donc la fonction $x \mapsto j+(x-m)^2$ est toujours positive car $j+(x-m)^2 \geqslant j$.
La fonction inverse est décroissante sur $[j;+\infty[$, donc on trouve :

x	$-\infty$ $\qquad$ m $\qquad$ $+\infty$
variations de $x \mapsto \dfrac{1}{j+(x-m)^2}$	$\nearrow$ $\quad$ $\frac{1}{j}$ $\quad$ $\searrow$

c) En déduire les solutions de $f(x)=2$

D'après la question précédente, quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leqslant \dfrac{1}{j}$ or $j \geqslant 1$, donc $f(x) \leqslant 1$.
L'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution.

2. Rappel : une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que quelque soient les réels a et b appartenant à I,

$$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$$

Pour chacun des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, démontrez là, sinon un contre-exemple suffit.

a) Soient f et g deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f \times g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

FAUX : si $f(x)=x-m$ et $g(x)=x-m$, f et g sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, mais $fg(x)=(x-m)^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sinon.

b) Soient f et g deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

VRAI : Soient a et b réels tels que $a < b$.
Comme f est croissante : $f(a) < f(b) \Leftrightarrow f(a) + g(a) < f(b) + g(a)$;
de même g est croissante : $g(a) < g(b) \Leftrightarrow g(a) + f(b) < g(b) + f(b)$;
donc $f(a) + g(a) < g(b) + f(b)$.
La fonction $(f+g)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.