		T2-c04 : fonctions dérivées	20
		bilan des compétences	12,75
CHR	3	Chercher : Analyser un problèm...	2,5
MOD	0	Modéliser : Traduire en langag...	0
REP	4	Représenter : Choisir un cadre...	3,75
CAL	7	Calculer : Effectuer un calcul...	6,5
RAI	0	Raisonner : Utiliser les notio...	0
COM	0	Communiquer : Opérer la conver...	0
		bilan des connaissances	7,25
FCT02	1	Second degré : résoudre équati...	1
FCT04	5	Sans dériver, déterminer le se...	3,75
FCT05	1	Exprimer fonction dérivée (fct...	0,5
FCT06	1	Tangente à une courbe : équati...	1
FCT07	1	Déterminer les variations, les...	1

	correction		
CAL	1.A.1 calcul des images		0,75
REP	1.A.2 allure de la courbe		1,5
REP	préciser points particulier et tangentes		1
FCT05	1.B.1 formule dérivée u/v		0,5
FCT04	dérivée degré 2 (num)		0,75
FCT04	dérivée degré 2 (dénom)		0,75
CAL	dérivée de f		0,75
FCT02	1.B.2 signe de f : méthode		1
CAL	calculs / conclusion		1
FCT07	1.B.3 tableau de variations		1
	total	9	
CAL	2.A.1 calculer images		0,75
REP	2.A.2 courbe de poly degré 2 : justif, calcul de points...		0,5
REP	courbe poly degré 2 : tracé		0,75
FCT04	2.B.1 dérivé poly degré 3 : formule		0,5
CAL	dérivée poly degré 3 : calculs f ’(x) et f ’(1)		0,75
FCT04	dérivée poly degré 2 et g ’(1)		1
FCT06	interpréter nb dérivé = coeff direct. tangente		1
CHR	tangentes confondues : explications		0,5
CAL	2.B.2.a expression de h		1
FCT04	dérivée poly degré 3		0,75
CHR	2.B.2.b recherche : démarche = variation / max		1,5
CAL	recherche : calculs / signe exacts		1,5
CHR	recherche : conclusion		0,5
	total	11	

C04

NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — Étude de fonction

9 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 1}{x^2 + 1}$$

avec α en fonction du numéro de votre mois de naissance.

n° du mois	α
$1, 2, 3$	-7
$4, 5, 6$	-5
$7, 8, 9$	5
$10, 11, 12$	7

Partie A – Calculatrice et lecture graphique

1. Calculer les images de 0 et $(-\alpha)$ par f.
   $f(0) = 1$ et $f(-\alpha) = \dfrac{(-\alpha)^2 + \alpha^2 + 1}{(-\alpha)^2 + 1} = \dfrac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1}$
2. Obtenir une représentation graphique à l'aide de la calculatrice, et dessiner rapidement l'allure de la fonction sur votre feuille ; c'est à dire : construire un repère sans graduation, dessiner l'allure la courbe, indiquer les coordonnées de quelques points particuliers dont les éventuels extrema locaux.
   attendus : l'allure de la courbe, le point $(0;1)$, lest tangentes horizontales en (-1) et 1, le point d'abscisse $(-\alpha)$.

Partie B – Calculs

1. Déterminer l'expression de f', la fonction dérivée de f.
   f est un quotient de la forme $\frac{u}{v}$ avec
   $u(x) = x^2 - \alpha x + 1$ et $u'(x) = 2x - \alpha$
   $v(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = 2x$
   donc $f'(x) = \dfrac{(2x - \alpha)(x^2 + 1) - (2x^2 - \alpha x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$

   $$\begin{array}{llll} 2x^3 & & +2x & \\ & -\alpha x^2 & & -\alpha \end{array}$$

   $$= \frac{-2x^3 \quad 2\alpha x^2 \quad -2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\alpha x^2 - \alpha}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\alpha(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

2. Déterminer, en justifiant, le signe de $f'(x)$.

Si $\alpha > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(x^2 - 1)$, polynôme du second degré, représentation graphique : parabole « orientée vers le haut », racines évidentes (-1) et 1.
Donc $f'(x) < 0$ sur $[-1\,;1]$;
sinon, c'est le contraire.

3. Compléter le tableau de variations de f. (Ne pas chercher les limites en l'infini !)

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		
variations de f		

si $\alpha > 0$:

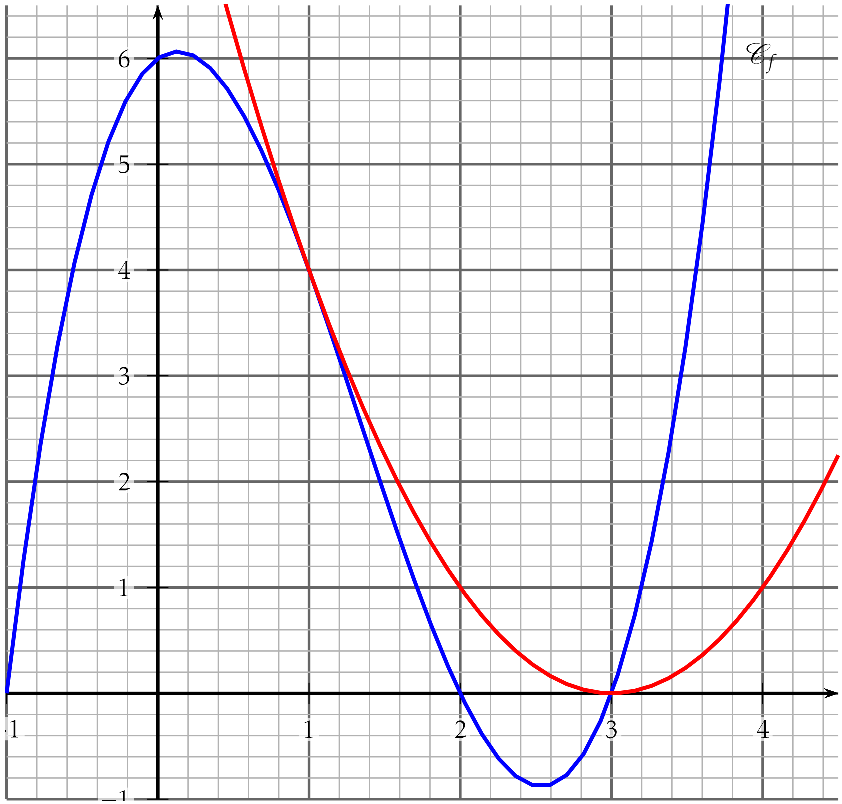
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

Exercice 2 — Écart entre deux courbes *11 points*

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = (x-3)^2$$

et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.



Partie A – Graphique

1. Calculer $g(1)$ et $g(3)$.

$g(1) = 4$ et $g(3) = 0$

2. Le graphique donne une représentation de la fonction f. Tracer celle de la fonction g en justifiant rapidement les variations.

g est de la forme $(x-\alpha)^2$, sa représentation est donc l'image de $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $3\vec{\imath}$

3. À l'aide d'une lecture graphique sur l'intervalle $[1\,;3]$, déterminer la valeur de x telle que l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ soit maximal.
Il semble que pour $x = 2{,}5$ l'écart entre les deux courbes est maximal.

Partie B – Calculs

1. Calculer $f'(1)$ et $g'(1)$, puis interpréter graphiquement le résultat.
dérivée de f : $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ donc $f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x + 1 = 3x^2 - 8x + 1$; d'où $f'(1) = -4$
dérivée de g : $g(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ donc $g'(x) = 2x - 6$; d'où $g'(1) = -4$
les coefficient directeurs étant égaux, les tangentes aux courbes au point d'abscisse 1 sont parallèles, mais ces tangentes passent toutes les deux par le point de coordonnées $(1\,;4)$, donc elles sont confondues.
2. Soit $h(x) = g(x) - f(x)$.
   a) Vérifier que $h'(x) = -3x^2 + 10x - 7$.
   $h(x) = g(x) - f(x)$ donc $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 2x - 6 - (3x^2 - 8x + 1) = -3x^2 + 10x - 7$
   b) En déduire la réponse exacte de la question 3.
   L'écart est maximum quand la fonction h atteint un maximum. L'étude de la fonction permet de connaître les variations et donc de trouver la valeur de x qui donne ce maximum (graphiquement, il existe).
   $h'(x)$ s'annule en 1 (racine évidente) et en $\frac{7}{3}$ (car le produit des racines est $\frac{c}{a}$). La courbe représentative de h' est une parabole « orientée vers le bas » ; donc sur l'intervalle $[1\,;3]$:

x	1		$\frac{7}{3}$		3
signe de $h'(x)$	0	+	0	−	

   La dérivée s'annule en changeant de signe, donc la fonction h atteint un maximum en $\frac{7}{3}$: c'est pour cette valeur que l'écart entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.