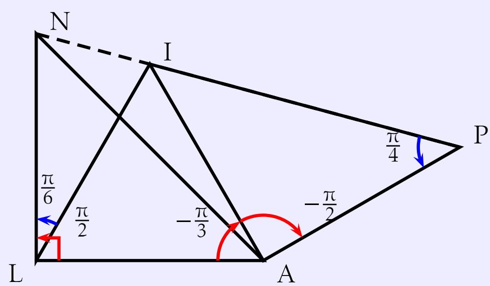
C05

NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — LAPIN *8 points*

1. Construire la figure suivante avec des instruments ou à main levée en respectant globalement les proportions.
   - LAN est un triangle rectangle isocèle en L tel que $\left(\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LN}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
   - LAI est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AI}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
   - API est un triangle rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$



2. Les points N, I et P semblent alignés : démontrer si cela est vrai ou non en utilisant les angles de vecteurs.
   Vous pourrez calculer $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IP}\right)$ en remarquant que
   $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IL}\right) + \left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et en détaillant les calculs de $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IL}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$.

   a) mesure de $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IL}\right)$
   - LA = LI car LAI est équilatéral ;
     or LA = LN car LAN est isocèle ;
     d'où LIN est isocèle de sommet principal L,
     donc $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IL}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LN}\right)\right)$

- mesure de $\left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LN}\right)$

  LAI est équilatéral, donc $\left(\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LI}\right) = \frac{\pi}{3}$

  On en déduit que $\left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LN}\right) = \left(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{LA}\right) + \left(\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LN}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

b) mesure de $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$

API est un triangle rectangle isocèle, donc les angles à la base sont égaux et valent $\frac{\pi}{4}$.

d'où $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right) = \frac{\pi}{4}$

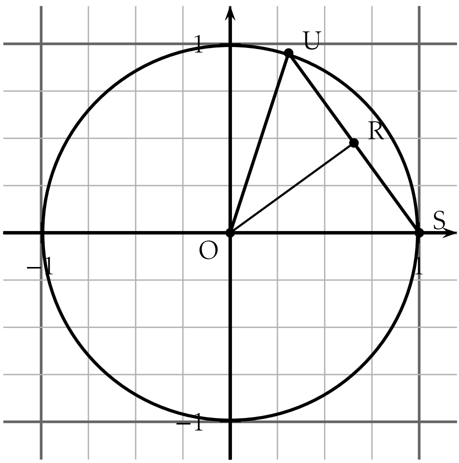
c) le triangle LAP est équilatéral, donc $\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{3}$

d) donc $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IL}\right) + \left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi$

les points N, I et P sont alignés.

Exercice 2 — OURS

8 points



Le repère est orthonormé, le cercle est de centre O et de rayon 1 ; $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right) = \frac{2\pi}{5}$; R est le milieu de [US].

1. Développer $\left(\sqrt{5} - 1\right)^2$

$\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 = 5 + 1 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$

2. Que représente la droite (OR) dans le triangle SOU ? Justifier.
En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OR}\right)$

Le triangle SOU est isocèle en O, R est le milieu de [OS] donc (OR) est la médiane issue de O, mais comme O est le sommet principal, (OR) est aussi la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right)$.
donc $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OR}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right) = \dfrac{\pi}{5}$

3. En admettant que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ (penser à utiliser 1.)

On sait que $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$
$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$
$= \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}$
Or $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier quadrant, donc le cosinus est positif :
$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

4. En déduire US.

$\mathrm{US} = \sqrt{(x_S - x_U)^2 + (y_S - y_U)^2} = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}$
$= \sqrt{\dfrac{25+5-10\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{40-8\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$

5. À l'aide la question précédente, donner la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Dans ROS, (RO) est la médiane issue du sommet principal, c'est donc aussi la médiatrice, donc le triangle ROS rectangle en R :
$\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\mathrm{RS}}{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{US}}{\mathrm{OS}}$
$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

6. Donner en justifiant, la mesure principale de $\dfrac{(2019-10m)\pi}{5}$, puis déterminer la valeur exacte de son sinus (m représente le numéro de votre mois de naissance).

$\dfrac{(2019-10m)\pi}{5} = \dfrac{2020}{5}\pi - \dfrac{1}{5}\pi - \dfrac{10}{5}m\pi = 2\times 202\pi - \dfrac{1}{5}\pi - 2m\pi$,
donc pour tous, la mesure principale est $-\frac{\pi}{5}$, donc le sinus est $-\sin(\frac{\pi}{5})$

Exercice 3 — Équations

4 points

1. Résoudre dans $[-2\pi\,;2\pi[$: $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

on trouve $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$
donc les solutions sont $x = -\dfrac{11\pi}{6}$; $x = -\dfrac{7\pi}{6}$; $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$

2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$: $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

on trouve $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$
d'où $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + k'\pi$
donc les solutions appartiennent à $\left\{-\dfrac{11\pi}{12}\,; -\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{12}\,; \dfrac{11\pi}{12}\right\}$

3. Simplifier l'expression suivante en détaillant les calculs :
$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x)$

$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x)$
$= -\sin(x) + \sin(x) + \sin(x) - (-\sin(x))$
$= 2\sin(x)$