Co6

Exercice 1 —

f est définie sur $[-1\,;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$

1. **Dérivée de f**

   $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2-3x+2$ $\quad u'(x) = 2x-3$

   $v(x) = x+2$ $\quad v'(x) = 1$

   donc

   $f'(x) = \dfrac{(2x-3)\times(x+2)-(x^2-3x+2)\times 1}{(x+2)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{2x^2+x-6-x^2+3x-2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$

2. Le dénominateur de f' est toujours positif,
   donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\mathrm{N}(x) = x^2+4x-8$.
   N est un polynôme du second degré, sa courbe représentative est une parabole « orientée vers le haut » car le coefficient de x^2 est 1 (positif).
   $\Delta = 4^2-4\times 1\times(-8) = 48$,
   donc N admet deux racines distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{48}}{2\times 1} = \dfrac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2-2\sqrt{3} \approx -5{,}46$
   et $x_2 = -2+2\sqrt{3} \approx 1{,}46$
   D'où $\mathrm{N}(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2-2\sqrt{3}\,;-2+2\sqrt{3}]$.
   D'où le tableau de variations de f sur $[0\,;10]$:

x	-1		$-2+2\sqrt{3}$		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	6	$\searrow$	$-7+4\sqrt{3}$	$\nearrow$	6

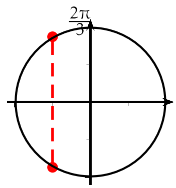
Remarque : les calculatrices donnent les valeurs exactes !

3. **Équation de la tangente :**
$y = f'(0)(x-0)+f(0) = -2x+1$

4. **Positions relatives**
On cherche x tel que $\mathscr{C}_f$ soit « au dessus » de $\mathscr{T}$, c'est à dire $f(x) \geq -2x+1$
$f(x) \geq -2x+1$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x+2} \geq -2x+1$
$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq (-2x+1)\times(x+2)$
L'ordre est conservé car $x+2>0$
$\Leftrightarrow x^2-3x+2+2x^2+3x-2 \geq 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 \geq 0$
L'inéquation est vraie pour tout réels, donc la courbe de f est toujours « au-dessus » de la tangente.

Exercice 2 —

1. $x \in [0\,;2\pi[$, $2\cos(x)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\dfrac{1}{2}$



Grâce à une lecture sur le cercle trigonométrique :
$x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$

2. $x \in \left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \leqslant 0$.
$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1-(-0{,}4)^2 = 0{,}84 \Rightarrow \cos(x) = -\sqrt{0{,}84}$

3. $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) - (\sin(-x)) + \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x)$
$A = -\sin(x) - (-\sin(x)) + (-\cos(x)) + (-\sin(x))$
$A = -\sin(x) - \cos(x)$

4. $|1-2x| = |5x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = 5x+3 \\ \text{ou} \\ 1-2x = -(5x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$

5. $|x-2|<3$ donc l'intervalle est centré en 2 et de demi longueur 3, d'où $|x-2|<3 \Leftrightarrow x \in]-1\,;5[$

Exercice 3 —

Partie A –

$x \in [-1\,;1]$ et $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2$

1. a) **Vérifier expression de la dérivée**
   g est un polynôme de degré 3, donc
   $g'(x) = -4 \times 3x^2 + 6 \times 2x - 0 = -12x^2 + 12x = 12x(1-x)$

   b) **Tableau de variations de g**
   g' est un polynôme du second degré,
   la parabole est orientée « vers la bas »
   et les racines sont 0 et 1 (grâce à la forme factorisée).

x	-1		0		1
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0
variations de g	8	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

   c) $g(-0{,}5) = 0$, donc $g(x) \leq 0$ pour $x \in [-0{,}5\,;1]$.

2. $x \in [-1\,;1]$ et $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + 1$
   a) **Dérivée de f**
   f est un polynôme de degré 4, sa dérivée est
   $f'(x) = -4x^3 + 2 \times 3x^2 - 2 = -4x^3 + 6x^2 - 2$

   b) **Tableau de variations de f**
   On remarque que $f'(x) = g(x)$, donc :

x	-1	$-0{,}5$	1
signe de $f'(x)$ = signe de $g(x)$	$+$	0	$-$ 0
variations de f	0 $\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$ 0

c) **variations de h**
h est une fonction composée, la fonction racine carrée étant croissante, les variations de h sont celles de f.
D'où le tableau de variations :

x	-1	$-0{,}5$	1
variations de h = variations de f	0 $\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$ 0

Partie B –

1. **Distance HM**
Dans le triangle OMH rectangle en H : $\mathrm{HM}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{OH}^2 = 1 - x^2$.
Or $\mathrm{HM} \geq 0$ (c'est une distance), donc $\mathrm{HM} = \sqrt{1-x^2}$.

2. **Aire du triangle**
$$a(x) = \frac{\mathrm{HA} \times \mathrm{HM}}{2} = \frac{(1-x) \times \sqrt{1-x^2}}{2}$$

3. **Expression de $a(x)$ en fonction de $h(x)$**
on sait que $h(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x^4 + 2x^3 - 2x + 1}$
Montrons que $h(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
$$\begin{aligned}(1-x)\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{(1-x)^2 \times (1-x^2)}\\ &= \sqrt{(1-2x+x^2) \times (1-x^2)}\\ &= \sqrt{1-x^2-2x+2x^3+x^2-x^4}\\ &= \sqrt{1-2x+2x^3-x^4}\\ &= \sqrt{f(x)} = h(x)\end{aligned}$$

4. **Aire maximale**
   Donc a est maximale quand h, l'est ;
   c'est à dire pour $x = -0{,}5$ et cette aire vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Exercice 4 —

1. **Calculs des premiers termes**
   une baisse de 40 % revient à multiplier par $\left(1 - \dfrac{40}{100}\right) = 0{,}6$
   donc $U_2 = 0{,}6U_1 + 2\,000 = 0{,}6 \times 9\,000 + 2\,000 = 7\,400$
   $U_3 = 0{,}6U_2 + 2\,000 = 0{,}6 \times 7\,400 + 2\,000 = 6\,440$

2. **Expression de U_n**
   D'après les calculs précédents : $U_{n+1} = 0{,}6U_n + 2\,000$

3. **Représentation graphique**

4. On conjecture que la suite (U_n) est décroissante et que sa limite est 5 000.

5. **Suite (V_n)**
   a) par définition $V_{n+1} = U_{n+1} - 5\,000$
      $V_{n+1} = 0{,}6U_n + 2\,000 - 5\,000$
      $V_{n+1} = 0{,}6U_n - 3\,000$
      $V_{n+1} = 0{,}6\left(U_n - \dfrac{3\,000}{0{,}6}\right)$
      $V_{n+1} = 0{,}6(U_n - 5\,000)$
      $V_{n+1} = 0{,}6V_n$

   b) Pour trouver le sens de variations, on étudie le signe de $V_{n+1} - V_n$.
      $V_{n+1} - V_n = 0{,}6V_n - V_n = -0{,}4V_n$
      Or $V_n > 0$, donc $V_{n+1} - V_n < 0$,
      la suite (V_n) est donc décroissante.

   c) $U_n = V_n + 5\,000$.
      Pour trouver le sens de variations, on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$
      $U_{n+1} - U_n = (V_{n+1} + 5\,000) - (V_n + 5\,000)$
      $U_{n+1} - U_n = V_{n+1} - V_n < 0$

donc la suite (U_n) est décroissante.

6. **Algorihtme**

   On peut travailler à l'aide d'un tableau de variables :

n	i	U	S
		9000	9000
6	2	7400	16400
	3	6440	22840
	4	5864	28704
	5	5518,4	34222,4
	6	5311,04	39533,44

   S correspond au nombre total de clients au cours des 6 derniers mois.

Exercice 5 —

$a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax^3 + 2x^2 - x - 1$

La fonction est strictement croissante si sa dérivée est strictement positive.

Remarque :

si $a = 0$, alors $f(x) = 2x^2 - x - 1$,

f est un polynôme du second degré, donc elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour la suite on suppose $a \neq 0$, donc f est un polynôme du troisième degré.

Dérivée de f

$f'(x) = 3ax^2 + 4x - 1$

C'est un polynôme du second degré, pour qu'il soit strictement positif

- il faut que f ne change pas de signe, donc il faut $\Delta < 0$;
- si $\Delta < 0$, alors le signe de f est celui du coefficient de x^2, donc il faut $3a > 0$

Il faut donc :

- $3a > 0 \Leftrightarrow a > 0$;

- $\Delta = 4^2 - 4 \times 3a \times (-1) = 16 + 12a$
  on veut $\Delta < 0 \Leftrightarrow 16 + 12a < 0 \Leftrightarrow a < -\dfrac{16}{12} = -\dfrac{4}{3}$

Or ne peut pas avoir les deux conditions réunies ensemble : il n'existe pas de valeur de a telle que la fonction f soit strictement croissante.