C07

NOM ....- jour et mois de naissance ....

Dans ce sujet les lettres j et m représentent respectivement votre jour et votre mois de naissance.

Exercice 1 — Somme des termes

6 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+m)^2 - (n-13)^2$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

mois	u_0	u_1	u_2
1	-168	-140	-112
2	-165	-135	-105
3	-160	-128	-96
4	-153	-119	-85
5	-144	-108	-72
6	-133	-95	-57
7	-120	-80	-40
8	-105	-63	-21
9	-88	-44	0
10	-69	-23	23
11	-48	0	48
12	-25	25	75

2. Émettre une conjecture sur la nature de la suite (u_n), puis la démontrer.

La suite semble arithmétique.
On remarque que : $u_n = (n+m)^2 - (n-13)^2$
$\Leftrightarrow u_n = n^2 + 2mn + m^2 - n^2 + 26n - 169$
$\Leftrightarrow u_n = (2m+26)n + (m^2 - 169)$
On reconnaît l'expression d'une suite arithmétique de raison $(2m+26)$ et de premier terme $u_0 = m^2 - 169$.

3. Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2019}$

On calcule u_{2019} : $u_{2019} = (2m+26)\times 2\,019 + (m^2 - 169)$
$= (m+13)(4\,038 + m - 13) = (m+13)(4\,025+m)$

D'après le cours :

$S = (2\,019+1)\dfrac{u_0 + u_{2019}}{2} = 2\,020 \times \dfrac{m^2 - 169 + (2m+26)\times 2\,019 + (m^2-169)}{2} =$
$2\,020(m^2 - 169 + (m+13)\times 2\,019)$
$= 2\,020(m+13)(m+2\,006)$

mois	S	u_0	r	u_{2019}
1	56 757 960	−168	28	56 364
2	60 842 400	−165	30	60 405
3	64 930 880	−160	32	64 448
4	69 023 400	−153	34	68 493
5	73 119 960	−144	36	72 540
6	77 220 560	−133	38	76 589
7	81 325 200	−120	40	80 640
8	85 433 880	−105	42	84 693
9	89 546 600	−88	44	88 748
10	93 663 360	−69	46	92 805
11	97 784 160	−48	48	96 864
12	101 909 000	−25	50	100 925

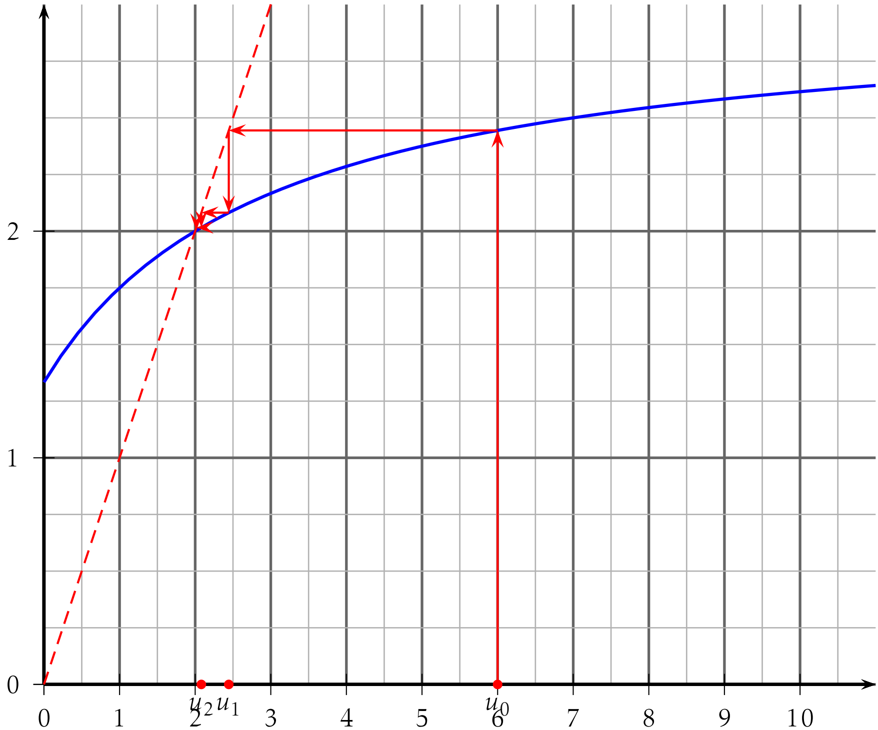
Exercice 2 — Suite et lectures graphiques *9 points*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$$

Le graphique donne la représentation de la fonction f définie sur $]-3\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$$



Partie A – Premières approches

1. À l'aide du graphique, représenter les premiers termes de la suite (u_n).
En déduire les variations de la suite et son comportement en $+\infty$.
par lecture graphique : la suite semble décroissante et elle semble converger vers 2

2. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0 + 3} = \frac{3 \times 6 + 4}{6 + 3} = \frac{22}{9} \approx 2{,}44$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 4}{u_1 + 3} = \frac{3 \times \dfrac{22}{9} + 4}{\dfrac{22}{9} + 3} = \frac{102}{49} \approx 2{,}08$$

3. Résoudre dans $]-3\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

$\dfrac{3x+4}{x+3} = x$

$\Leftrightarrow 3x+4 = x(x+3) \Leftrightarrow x^2+3x-3x-4 = 0 \Leftrightarrow x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Partie B – À l'aide d'une suite auxilliaire

1. On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (v_n) : $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

a) Calculer les valeurs exactes de v_0, v_1 et v_2.

$v_0 = \dfrac{u_0+2}{u_0-2} = 2 \qquad v_1 = \dfrac{u_1+2}{u_1-2} = 10 \qquad v_2 = \dfrac{u_2+2}{u_2-2} = 50$

b) Quelle semble être la nature de (v_n) ? Démontrer-le.

on remarque que $v_1 = 5 \times v_0$; $v_2 = 5 \times v_1$. La suite (v_n) semble être géométrique de raison 5.

Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2}$

$= \dfrac{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$

$= \dfrac{5u_n+10}{u_n+3} \times \dfrac{u_n+3}{u_n-2}$

$= \dfrac{5(u_n+2)}{(u_n-2)} = 5v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
Puis celle de u_n en fonction de n.

par définition $v_n = 5^n v_0 = 2 \times 5^n$

on sait que $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-2}$

$\Leftrightarrow (u_n-2) \times 2 \times 5^n = u_n + 2$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{2+4\times 5^n}{2\times 5^n - 1}$

d) En déduire le signe de $A = u_n - 2$. Interpréter ce résultat.

$A = u_n - 2 = \dfrac{2+4\times 5^n}{2\times 5^n - 1} - 2$
$= \dfrac{2+4\times 5^n + 2 - 4\times 5^n}{-1+2\times 5^n}$
$= \dfrac{4}{-1+2\times 5^n}$
Donc $A > 0$, la suite (u_n) est toujours spérieure à 2.

Exercice 3 — Suite et recherche

5 points

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$: $u_n = 2^n$. Calculer, en détaillant, la valeur exacte de $A = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2, donc
$A = 1 \times \dfrac{1-2^{20+1}}{1-2} = 2^{21} - 1 = 2\,097\,151$

2. Soit (v_n) la suite défnie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

- Donner les valeurs exactes de v_0, v_1 et v_2.

$v_0 = 1 - \dfrac{1}{2^0} = 0$

$v_1 = 1 - \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

$v_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

- Calculer $S_2 = v_0 + v_1 + v_2$.

$S_2 = 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

- Calculer $S_{20} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{20}$.

$S_{20} = \left(1 + \dfrac{1}{2^0}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{2^1}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(1 + \dfrac{1}{2^{20}}\right)$

$= \underbrace{1+1+\ldots 1}_{21\text{termes}} + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \cdots + \dfrac{1}{2^{20}}$

$= 21 + \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{21}}}{1 - \dfrac{1}{2}}$

$= 21 + 2 - \dfrac{1}{2^{20}} = \dfrac{24\,117\,247}{1\,048\,576} \approx 22{,}99$