# Co8

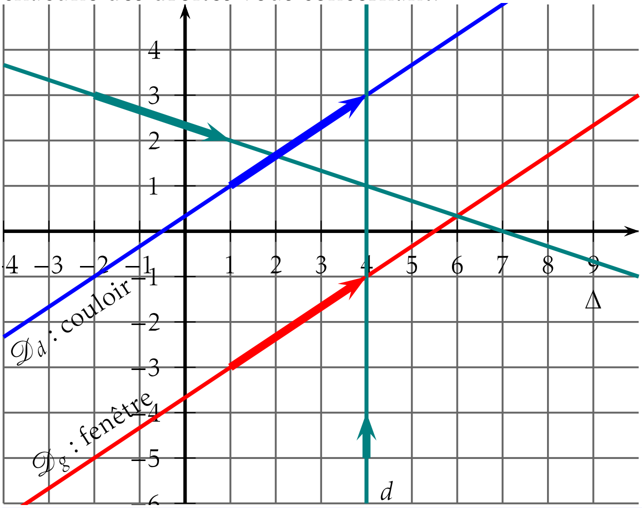
NOM ............................- Mois de naissance ................

## Exercice 1 — Lectures graphiques

*7 points*

Ceux qui sont du côté *gauche* de la table (vers la fenêtre) : travaillent avec les droites $\mathscr{D}_g$, $\Delta$ et $d$ ; ceux qui sont du côté *droit* de la table (vers le couloir) : travaillent avec les droites $\mathscr{D}_d$, $\Delta$ et $d$.

1. Avec la précision permise par le graphique, donner un vecteur directeur de chacune des droites vous concernant.




| droite | vect. dir. |
|---|---|
| $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_d$ | $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ |
| $\Delta$ | $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ |
| $d$ | $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ |

2. Sachant que pour chacune des droites dessinées, le point d'abscisse 4 est à coordonnées entières, en déduire une équation cartésienne de chacune des

droites vous concernant.

| | |
|---|---|
| • $\mathscr{D}_d$ passe par $(4;3)$, donc<br>$\mathscr{D}_d : -2x+3y-(-2\times4+3\times3)=0$<br>$\Leftrightarrow -2x+3y-1=0$<br>• $\mathscr{D}_g$ passe par $(4;-1)$, donc<br>$\mathscr{D}_g : -2x+3y-(-2\times4+3\times(-1))=0$<br>$\Leftrightarrow -2x+3y+11=0$ | • $\Delta$ passe par $(4;1)$, donc<br>$\Delta : x+3y-(1\times4+3\times1)=0$<br>$\Leftrightarrow x+3y-7=0$<br>• $d : x=4$ |

3. Lire, puis calculer les coordonnées du points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ vous concernant avec $\Delta$.

**Intersection de $\mathscr{D}_d$ et $\Delta$.**

On lit I(2;1,7).

Les coordonnées de I vérifient :

$$\begin{cases} -2x+3y-1=0 & L_1 \\ x+3y-7=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=0 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ 3y=-x+7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$$

**Intersection de $\mathscr{D}_g$ et $\Delta$.**

On lit I(6;1,3).

Les coordonnées de I vérifient :

$$\begin{cases} -2x+3y+11=0 & L_1 \\ x+3y-7=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+18=0 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ 3y=-x+7=0 \end{cases}$$

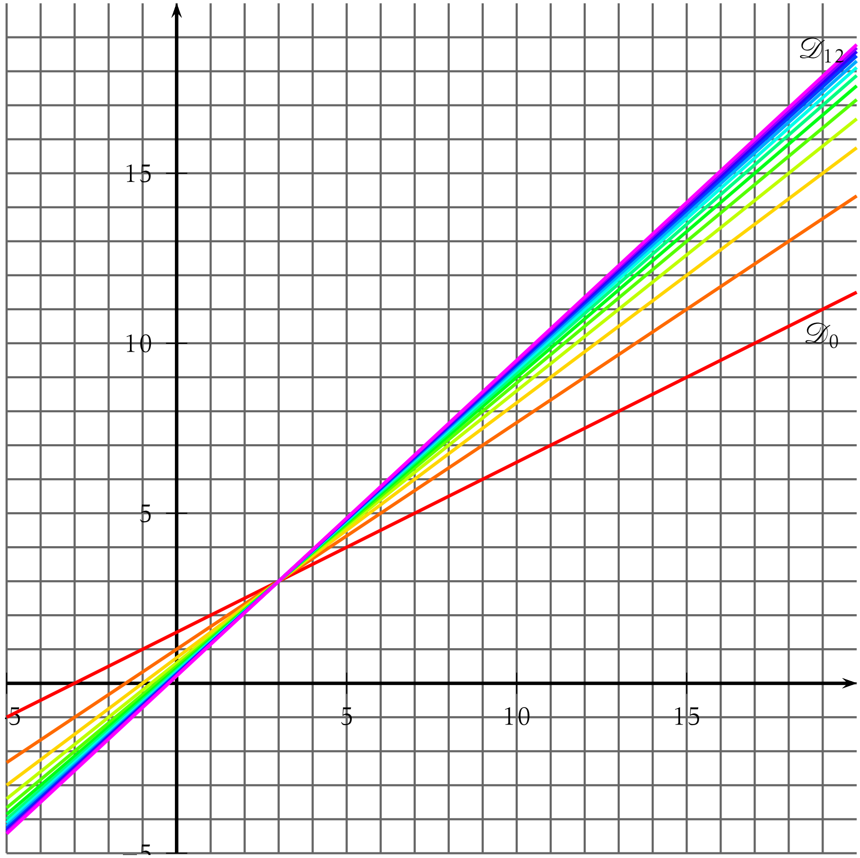
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

## Exercice 2 — Famille de droites

*7 points*

Pour tout réel $m$, on appelle $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $(m+1)x-(m+2)y+3=0$.

1. a) Construire, en détaillant la méthode, $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_0$ où $m$ est le numéro de votre mois de naissance.



Il faut deux points ou un point et un vecteur directeur pour tracer une droite.
le mieux est de prendre le point de coordonnées $(3;3)$...

| $m$ | $x_A$ | $y_A$ | $x_{\vec{u}}$ | $y_{\vec{u}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,5 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 0,75 | 4 | 3 |
| 3 | 0 | 0,6 | 5 | 4 |
| 4 | 0 | 0,5 | 6 | 5 |
| 5 | 0 | $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$ | 7 | 6 |
| 6 | 0 | 0,375 | 8 | 7 |
| 7 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 9 | 8 |
| 8 | 0 | 0,3 | 10 | 9 |
| 9 | 0 | $\frac{3}{11} \approx 0{,}27$ | 11 | 10 |
| 10 | 0 | 0,25 | 12 | 11 |
| 11 | 0 | $\frac{3}{13} \approx 0{,}23$ | 13 | 12 |
| 12 | 0 | $\frac{3}{14} \approx 0{,}21$ | 14 | 13 |

**b)** Montrer que *toutes* les droites $\mathscr{D}_m$ sont concourantes. Calculer les coordonnées de ce point.

**Idée 1**
On remarque que l'intersection de $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_0$ est le point de coordonnées $(3\,;3)$. Supposons que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point $\mathrm{I}(3\,;3)$. Démontrons que ce point appartient à toutes les droites $\mathscr{D}_m$, c'est à dire, démontrons que :
$(m+1)\times x_\mathrm{I}-(m+2)\times y_\mathrm{I}+3=0$
$\mathrm{E}=(m+1)\times x_\mathrm{I}-(m+2)\times y_\mathrm{I}+3$
$\Leftrightarrow \mathrm{E}=(m+1)\times 3-(m+2)\times 3+3$
$\Leftrightarrow \mathrm{E}=3m+3-3m-6+3=0$
donc le point I appartient à toutes les droites $\mathrm{D}_m$.

**Idée 2**
Soient $m$ et $p$ deux entiers distincts, cherchons l'intersection de $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_p$.

$$\begin{cases}(m+1)x-(m+2)y+3=0 & \mathrm{L}_1\\ (p+1)x-(p+2)y+3=0 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-p)x-(m-p)y=0 & \mathrm{L}_1\leftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2\\ (p+1)x-(p+2)y+3=0 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-p)(x-y)=0 & \mathrm{L}_1\\ (p+1)x-(p+2)y+3=0 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

donc pour $\mathrm{L}_1$ il faut $m=p$, ce qui est impossible car $m\neq p$ ou $x=y$.

$$\begin{cases}x=y\\ -x+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$$

**2.** Déterminer s'il existe une valeur de $m$ pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $4x+5y-6=0$.

| | |
|---|---|
| Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ ; un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}m+2\\m+1\end{pmatrix}$. | On cherche $m\in\mathbb{R}$ tel que $-5(m+1)-4(m+2)=0$<br>$\Leftrightarrow -9m-13=0$<br>$\Leftrightarrow m=-\dfrac{13}{9}$ |

3. Déterminer s'il existe une valeur de $m$ pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite $d$ d'équation : $y = x + 7$.

| | |
|---|---|
| Un vecteur directeur de $d$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ; On cherche $m \in \mathbb{R}$ tel que : $(m+1)-(m+2)=0$. | Cette équation n'a pas solution, donc il n'existe pas de valeur de $m$ telle que la droite $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite $d$. |

## Exercice 3 — Droite et cercle

*6 points*

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, orthonormé, on définit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\mathrm{A}(3;2)$ de rayon $(m+1)$ et la droite $d$ d'équation $y = m+1$, avec $m$ le numéro de votre mois de naissance.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

| | |
|---|---|
| Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\mathrm{MA} = m+1$. L'équation du cercle de centre A et de rayon $(m+1)$ est : | $(x-x_{\mathrm{A}})^2+(y-y_{\mathrm{A}})^2=(m+1)^2$ <br> $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=(m+1)^2$ |

2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $d$.

Les coordonnées d'un point d'intersection entre la droite et le cercle sont solutions de : $\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=(m+1)^2\\ y=m+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x+9+(m-1)^2-(m+1)^2=0\\ y=m+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x-4m+9=0\\ y=m+1\end{cases}$

donc $\Delta=(-6)^2+4\times(-4m+9)=16m$, d'où $x=3\pm2\sqrt{|m|}$.

Il y a donc deux points d'intersection l'un de coordonnées $(3-2\sqrt{m}\,;m+1)$, l'autre de coordonnées $(3+2\sqrt{m}\,;m+1)$ ($m>0$, donc $|m|=m$).

| $m$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 |
| 2 | $3-2\sqrt{2}$ | $3+2\sqrt{2}$ |
| 3 | $3-2\sqrt{3}$ | $3+2\sqrt{3}$ |
| 4 | $-1$ | 7 |
| 5 | $3-2\sqrt{5}$ | $3+2\sqrt{5}$ |
| 6 | $3-2\sqrt{6}$ | $3+2\sqrt{6}$ |
| 7 | $3-2\sqrt{7}$ | $3+2\sqrt{7}$ |
| 8 | $3-4\sqrt{2}$ | $3+4\sqrt{4}$ |
| 9 | $-3$ | 9 |
| 10 | $3-2\sqrt{10}$ | $3+2\sqrt{10}$ |
| 11 | $3-2\sqrt{11}$ | $3+2\sqrt{11}$ |
| 12 | $3-4\sqrt{3}$ | $3+4\sqrt{3}$ |

3. *Cette question est notée sur 2 points au maximum, ce n'est pas beaucoup pour le travail à faire...*

On peut démontrer que pour tout $m\geqslant0$, la droite d'équation $y=m+1$ coupe le cercle en deux points (éventuellement confondus) et que ces points décrivent une parabole !

Pour $m=0$, les deux points sont confondus en $A_0(3\,;1)$ ; pour $m=16$, les deux points sont $A_{16}(-5\,;17)$ et $B_{16}(11\,;17)$.

Déterminer l'équation de la parabole.

Les points $A_{16}$ et $B_{16}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 3$, c'est donc l'axe de symétrie de la parabole, on en déduit que le point $A_0$ est le sommet.

L'équation de la parabole est $y = ax^2 + bx + c$ et l'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow b = -6a$.

D'où le système :

$$\begin{cases} a\times(-5)^2 - 6a\times(-5) + c = 17 & \text{point } A_{16} \\ a\times 3^2 - 6a\times 3 + c = 1 & \text{point } A_0 \\ b = -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55a + c = 17 & L_1 \\ -9a + c = 1 & L_2 \\ b = -6a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 64a = 16 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ c = 1 + 9a & L_2 \\ b = -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = \dfrac{13}{4} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc l'équation de la parabole est : $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{4}$