PISCICOLE

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$.

1. Une belle fonction

1.1 Quelques calculs

On cherche l'ensemble des points M tels que leurs coordonnées annulent la fonction f définie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (x^2 - y^2 - 3)^2 - (1 - y^2)(2x + 4)^2$$

1. Trouver les valeurs de y pour $x \in \{-1;-2;2\}$

a) $f(-1,y) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - y^2 - 3)^2 - (1 - y^2)(2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 + 2)^2 - 4(1 - y^2) = 0$

$\Leftrightarrow y^4 + 2y^2 + 4 - 4 + 4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^4 + 8y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2\left(y^2 + 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$

On obtient le point $(-1,0)$

b) $f(-2,y) = 0$

$\Leftrightarrow (4 - y^2 - 3)^2 - (1 - y^2)(-4 + 4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y = \pm 1$

On obtient les points $(-2;-1)$ et $(-2,1)$

c) $f(2,y)=0$

$\Leftrightarrow (4-y^2-3)^2-(1-y^2)(4+4)^2=0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)^2-64(1-y^2)=0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)^2+64(y^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)(y^2-1+64)=0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)(y^2+63)=0$

$\Leftrightarrow y=\pm 1$

On obtient les points $(2;-1)$ et $(2,1)$

2. Donner les solutions de $f(x,0)=0$.

$$\begin{aligned} f(x,0)= &\ (x^2-3)^2-(2x+4)^2 \\ &= (x^2-3-2x-4)(x^2-3+2x+4) \\ &= (x^2-2x-7)(x^2+2x+1) \\ &= \left(x-1)^2-1-7\right)(x+1)^2 \\ &= \left((x-1)^2-8\right)(x+1)^2 \\ &= \left(x-1-\sqrt{8}\right)\left(x-1+\sqrt{8}\right)(x+1)^2 \end{aligned}$$

On obtient les points $(1+2\sqrt{2};0)$, $(1-2\sqrt{2};0)$ et $(-1;0)$
soit $(3{,}83;0)$, $(-1{,}83;0)$.

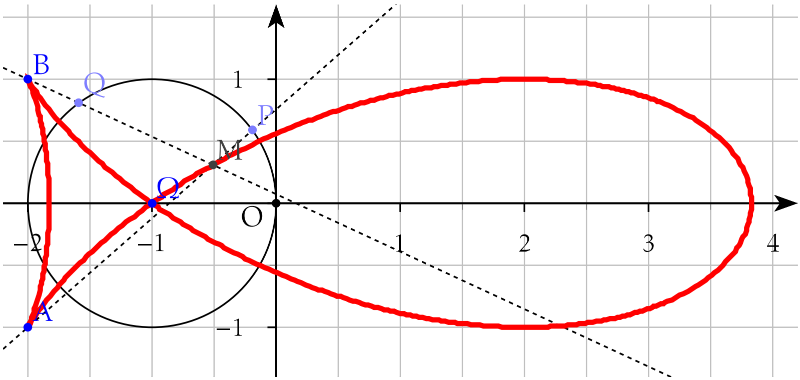
3. Donner les solutions de $f\left(x,\frac{1}{2}\right)=0$. (Vous pourrez chercher le carré de $2+2\sqrt{3}$...)

$$\begin{aligned} f\left(x,\tfrac{1}{2}\right)= &\ \left(x^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-3\right)^2-\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)(2x+4)^2 \\ &= \left(x^2-\tfrac{13}{4}\right)^2-\tfrac{3}{4}(2x+4)^2 \\ &= \left(x^2-\tfrac{13}{4}\right)^2-\left(\sqrt{3}(x+2)\right)^2 \\ &= \left(x^2-\tfrac{13}{4}-\sqrt{3}(x+2)\right)\left(x^2-\tfrac{13}{4}+\sqrt{3}(x+2)\right) \end{aligned}$$

On obtient les points $\left(-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1-\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$
soit $(-1{,}85;0{,}5)$, $(-1{,}60;0{,}5)$, $(-0{,}13;0{,}5)$ et $(3{,}60;0{,}5)$

1.2 Figure

Sur la figure : placer les points M obtenus précédemment.



1.3 Une construction géométrique

Vous admettrez que l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $f(x;y) = 0$ peuvent être trouvés grâce à la construction suivante :

- on définit les points $\mathrm{A}(-2;-1)$ et $\mathrm{B}(-2;1)$.
- le point P est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-1;0)$ et de rayon 1.
- Q est l'image de P par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- M est l'intersection des droites (AP) et (BQ).

1.4 Avec des paramètres

GeoGebra sait tracer l'ensemble de points vérfiant

$$(x^2 - y^2 - 3)^2 - (1 - y^2)(2x + 4)^2 = 0$$

En remplaçant certains coefficients par des curseurs, tester d'autres *piscicoles*.

Ou bien reprendre la construction géométrique et tester avec d'autres angles de rotation.

2. Une autre construction célèbre

Maria Gaetana AGNESI (1718 - 1799) est une mathématicienne italienne. Enfant précoce, elle aurait présenté à l'âge de neuf ans, un discours (en latin), sur le droit des femmes à l'éducation.

Elle a écrit un traité d'analyse mathématique renommé.

En mathématiques elle a étudié une courbe qui porte son nom *la versiera di Agnesi* injustement traduite en *la sorcière d'Agnesi*. *Extraits de Wikipédia*

2.1 Constrution de la « Sorcière d'Agnesi »

- Soit [OP] le diamètre d'un cercle fixé. Tracer Δ la perpendiculaire à [OP] passant par P.
- à partir de tout autre point A du cercle, on trace la sécante [OA) ; elle coupe Δ en B.
- Le point M est l'intersection de la perpendiculaire à Δ en B et de la parallèle à Δ passant par A.

Construire la « Sorcière d'Agnesi » point par point.

2.2 Équation

On se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$avec $P(0;2)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OP], et A un point d'abscisse positive de ce cercle.

1. Donner une équation de $\mathscr{C}$.
   $x^2+(y-1)^2=1$
2. Donner une équation de Δ. Soit B un point de Δ d'abscisse b ($b>0$).
   $\Delta : y=2$

3. Donner une équation de (OB), en déduire l'ordonnée de A.

$(\mathrm{OB}) : y = \dfrac{2}{b}x$

donc $x_{\mathrm{A}} = \dfrac{b}{2}y_{\mathrm{A}}$, or $\mathrm{A} \in \mathscr{C}$, donc

$$\frac{b^2}{4}y_{\mathrm{A}}^2 + y_{\mathrm{A}}^2 - 2y_{\mathrm{A}} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}\left(-2 + \frac{4+b^2}{4}y_{\mathrm{A}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}} = 0 \text{ ou } y_{\mathrm{A}} = \frac{8}{4+b^2}$$

4. En déuduire une relation entre les coordonnées de M.

donc $\mathrm{M}\left(b\,;\dfrac{8}{4+b^2}\right)$, elles vérfient $y = \dfrac{8}{4+x^2}$.