C02

NOM . . . .- Mois de naissance . . . .

Exercice 1 — Une fonction

8 points

Soit la fonction f définie sur $[-5\,;10]$ par

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + (5-m)x^2 - 5mx$$

où m est le numéro de votre mois de naissance.

1. À l'aide de votre calculatrice, donner le tableau de variations de f sur $[-5\,;10]$.

   On trace la fonction (en faisant attention à l'échelle des axes !)

x	-5		$\frac{-5}{2}$		$\frac{m}{2}$		10
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Donner l'expression de f', la dérivée de f, en détaillant les calculs.

   $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + (5-m)x^2 - 5mx$

   donc $f'(x) = \frac{4}{3} \times 3x^2 + 2(5-m)x - 5m = 4x^2 + 2(5-m)x - 5m$

3. La fonction f' *est* un polynôme du second degré : calculer en détaillant, les valeurs qui l'annulent.

   $f'(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a = 4$, $b = 2(5-m)$ et $c = -5m$

   On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots = 4(5+m)^2$

   Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines :

   $\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(5-m)-2(5+m)}{2\times 4} = \frac{-20}{8} = \frac{-5}{2}$

   et $\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(5-m)+2(5+m)}{2\times 4} = \frac{m}{2}$

Exercice 2 — Antibotique *12 points*

Vaguement Métropole, Réunion, sept. 2016

On injecte un antibiotique en perfusion. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité (en mg) d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{80t}{t+100}$$

1. Calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

   f est de la forme $\dfrac{u(t)}{v(t)}$

avec $u(t) = 80t$	et $v(t) = t+100$
donc $u'(t) = 80$	$v'(t) = 1$

   donc $f'(t) = \dfrac{80\times(t+100) - 80t\times 1}{(t+100)^2} = \dfrac{8\,000}{(t+100)^2}$

   Quelques soit $t \in [0\,;+\infty[$, $(100+t)^2 > 0$, donc $f'(t) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Calculer $f'(300)$.

   $f'(300) = \dfrac{8\,000}{(300+100)^2} = \dfrac{8\,000}{160\,000} = 0{,}05$

3. Dans le repère, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

   La quantité limite de l'antibiotique présent dans le sang est 80 mg/l.

   Représenter cette quantité limite sur le graphique.
   Cette quantité est représentée par la droite d'équation $y = 80$.

4. Le débit de perfusion est satisfaisant si 85 % de la quantité limite de l'antibiotique est arrivée dans le sang au bout de 10 heures.

Déterminer, de deux façons différentes, si le débit de perfusion est satisfaisant :

a) À l'aide du graphique (laisser apparents les traits de construction utiles).

Il faut calculer 85 % de 80 , c'est $\frac{85}{100} \times 80 = 68$

b) Sans le graphique, en résolvant une équation.

On cherche t tel que $f(t) \geqslant 68$

$\Leftrightarrow \dfrac{80t}{t+100} \geqslant 68$

$\Leftrightarrow 80t \geqslant 68(t+100)$

$\Leftrightarrow 12t \geqslant 6\,800$

$\Leftrightarrow t \geqslant \dfrac{6\,800}{12}$

$\Leftrightarrow t \geqslant 567$

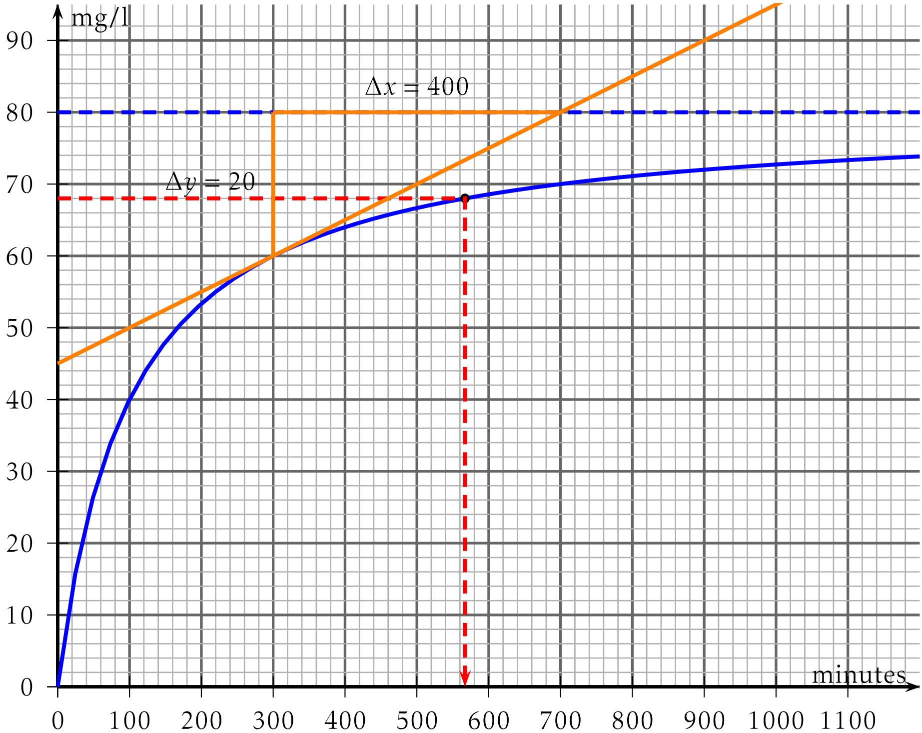
Donc la quantité de médicament est à 85 % de la quantité limite à partir de la 567^e^ minute, donc avant la 600^e^ minutes correspondantes à 10 heures, le débit de la perfusion est satisfaisant.

5. Tracer sur le graphique, du mieux possible, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ passant par le point d'abscisse 300.

Lire le coefficient directeur de cette droite.

Interpréter dans le contexte.

On lit $\frac{20}{400} = 0{,}05$; cela représente la quantité d'antibiotique injectée dans le sang à la 300^e^ minute.


mg/l
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
$\Delta x = 400$
$\Delta y = 20$
minutes
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100