Sujet à rendre avec la copie — Numéro d'anonymat : ....

Exercice 1 —

5 points

Polynésie, juin 2017 - exercice 1

On injecte un médicament à un patient. Le tableau suivant donne la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans son sang à différents instants.

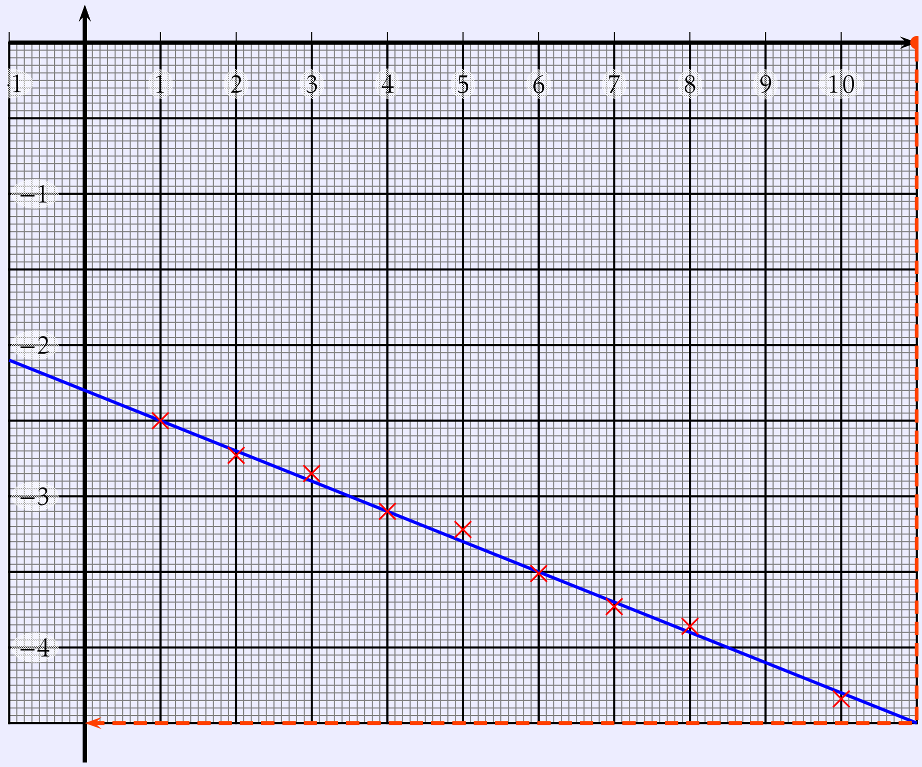
Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	−2,50									

1. Compléter la dernière ligne du tableau. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2}.

Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	−2,50	−2,73	−2,85	−3,10	−3,22	−3,51	−3,73	−3,86	−3,96	−4,34

2. Tracer, sur le papier millimétré de l'annexe 1, le nuage de points $M_i(t_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités à 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

Graphique exercice 1.



3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés.

Déterminer une équation de cette droite sous la forme $y = at + b$. Les valeurs de a et b seront arrondies à 10^{-3}.

À l'aide de la calculatrice : $y = -0{,}196t - 2{,}3$

Dans la suite, on retient comme droite d'ajustement la droite Δ d'équation : $y = -0,2t - 2,3$.

4. Tracer la droite Δ sur la feuille de papier millimétré précédente.
5. Déterminer graphiquement la concentration au bout de 11 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} millimoles par litre.

   Graphiquement, on lit $y = -4{,}5$, or $y = \ln(\mathrm{C})$, donc $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{y}$, d'où $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{-4{,}5} \approx 0{,}011$ soient 0,011 millimoles par litre.
6. Justifier que la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans le sang du patient à l'instant t peut être modélisée par $\mathrm{C}(t) = 0,1\mathrm{e}^{-0,2t}$.

   On sait que $y = -0{,}2t - 2{,}3$ et que $y = \ln(\mathrm{C})$,
   donc $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{y} = \mathrm{e}^{-0{,}2t-2{,}3} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{\mathrm{e}^{2{,}3}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2{,}3}} \times \mathrm{e}^{-0{,}2t} \approx 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$
7. À l'aide d'un calcul, déterminer au bout de combien d'heures la concentration sera-t-elle inférieure ou égale à 10^{-3} millimoles par litre ? On arrondira le résultat à l'heure.

   On cherche t tel que $\mathrm{C}(t) < 10^{-3}$.
   $\mathrm{C}(t) < 10^{-3}$
   $\Leftrightarrow 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} < 10^{-3}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} < \dfrac{10^{-3}}{0{,}1}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} < 10^{-2}$
   $\Leftrightarrow -0{,}2t < \ln 10^{-2}$
   $\Leftrightarrow t > \dfrac{-2\ln 10}{-0{,}2}$
   $\Leftrightarrow t > 10\ln 10$
   $\Leftrightarrow t > 23{,}02$
   la concentration sera inférieure à 10^{-3} millimoles par litre au bout de 24 heures.

Exercice 2 —

5 points

Polynésie, juin 2017 - exercice 2

Une entreprise produit 30 tonnes de déchets non recyclables en 2015. Chaque année, l'entreprise veut diminuer la masse de déchets non recyclables de 3 % par rapport à l'année précédente.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on note p_n la masse de déchets non recyclables à l'année $2015 + n$.

1. Justifier que (p_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme p_0 et la raison.

   Diminuer de 3 % revient à multiplier par $\left(1 - \dfrac{3}{100}\right)$, soit 0,97 ;
   donc on a $p_{n+1} = 0{,}97 \times p_n$ avec $p_0 = 30$: c'est bien l'expression d'une suite géométrique de raison 0,97 et de premier terme $p_0 = 30$.
2. Exprimer p_n en fonction de n.

   Par définition : $u_n = 0{,}97^n \times p_0 = 0{,}97^n \times 30$.
3. Quelle est la masse de déchets non recyclables en 2026 ? On donnera la valeur arrondie au kilogramme.

   L'année 2026 correspond à $n = 11$, car $2015+11 = 2026$;
   et $p_9 = 0{,}97^{11} \times 30 \approx 21{,}459$, soit 21 459 kg.

4. On considère l'algorithme suivant :

   a) Indiquer, dans le tableau fourni en annexe et à rendre avec la copie, les valeurs successives prises par les variables u et S lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt. Les valeurs seront arrondies à 10^{-2}.

   Exercice 2. - 4.a

Étape i	u	S
1	29,10	59,10
2	28,23	87,33
3	27,38	114,71
4	26,55	141,27
5	25,76	167,03

   b) Quelle sera le valeur de S à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Que représente-t-elle ?

   On trouve S = 162,30, cela représente la somme des déchets produits les 5 prochaines années.

$u \leftarrow 30$
$S \leftarrow 30$
Pour i allant de 1 à 5
    $u \leftarrow 0,97 \times u$
    $S \leftarrow S + u$
Fin Pour

5. a) Compléter l'algorithme donné en annexe afin de déterminer en quelle année la somme de tous les déchets non recyclables cumulés depuis l'année 2015 dépassera 300 tonnes.

   Exercice 2. - 5.a

$u \leftarrow 30$
$S \leftarrow 30$
$n \leftarrow 0$
tant que $S < 300$ faire
    $u \leftarrow 0,97 \times u$
    $S \leftarrow S + u$
    $n \leftarrow n + 1$
fin tantque

   b) Déterminer alors l'année où la somme de tous les déchets non recyclables cumulés depuis l'année 2015 dépassera 300 tonnes.

   À l'aide de l'algorithme, on trouve $n = 11$, c'est donc en $2015 + 11 = 2026$ que l'entreprise aura produit plus de 300 tonnes de déchets.

Exercice 3 —

10 points

Une petite entreprise familiale veut stériliser une partie de sa production maraîchère sous forme de conserve à l'aide d'un autoclave.

On veut étudier comment la température au cœur de la conserve placée dans l'autoclave, évolue en fonction du temps.

Partie A – Modélisation n° 1

Soit f la fonction qui à tout temps t exprimé en minutes, associe la température, exprimée en degrés Celsius, au cœur de la conserve placée dans l'autoclave.

Dans cette modélisation, on suppose que $f(t) = 33\ln(t+1)+20$ pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$

1. a) Calculer f' fonction dérivée de f.

La fonction $t \mapsto \ln(t+1)$ est de la forme $\ln(u)$, avec $u(t) = t+1$; sa dérivée est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

donc $f'(t) = 33 \times \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{33}{t+1}$

b) Étudier le signe de f' sur $[0\,;+\infty[$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t+1 > 0 \Leftrightarrow t > -1$. Donc sur $[0\,;+\infty[$, $f'(t) > 0$.

c) Déterminer la limite de f quand t tend vers l'infini.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t+1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t+1) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

d) Donner le tableau de variations de f.

t	0 $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(t)$	$+$
variations de f	$20 \nearrow +\infty$

2. Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120° C.
Calculer au bout de combien de temps dans cette modélisation, après le lancement de la stérilisation ($t = 0$), il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation aura été efficace.

On cherche t, tel que $f(t) > 120$.

$f(t) > 120$

$\Leftrightarrow 33\ln(t+1)+20 > 120$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) > \dfrac{100}{33}$

$\Leftrightarrow t+1 > \mathrm{e}^{\frac{100}{33}}$

$\Leftrightarrow t > \mathrm{e}^{\frac{100}{33}} - 1 \approx 19{,}7$.

Donc on pourra arrêter l'autoclave au bout de 22,7 min (19,7 min + 3 mn).

Partie B – Modélisation n° 2

Dans cette partie, on propose une autre modélisation notée g pour la fonction qui donne la température au cœur de la conserve placée dans l'autoclave en fonction du temps.

Dans cette modélisation, on suppose que $g(t) = 125 - 104\,\mathrm{e}^{-0{,}16t}$ pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1. La courbe $\mathscr{C}_g$ représentant la fonction g est donnée en annexe. En vous aidant du graphique et en laissant vos traits de construction, répondre aux questions suivantes :

   a) Quelle est la limite de g lorsque t tend vers l'infini ?

   On lit $\lim\limits_{t\to+\infty} = 125$

   b) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse 6.

   On lit qu'un déplacement de 4 unités en abscisses, correspond à un déplacement de 25 unités en ordonnées ; et l'ordonnée à l'origine est environ 47, donc une équation de la tangente est $y = \dfrac{25}{4}t + 47 \approx 6t + 47$.

   c) B est le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse 15. Donner une équation de la droite (AB).

   (AB) a pour équation $y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(t - x_A) + y_A$ donc (AB) : $y = \dfrac{115-85}{15-6}(t-6) + 85 = 3{,}3(t-6) + 85 = 3{,}3t + 67{,}7$

   d) Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120°C.
   Dites au bout de combien de temps après le lancement de la stérilisation ($t = 0$), il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation aura été efficace (temps arrondi à la minute par excès).

   Graphiquement la température atteint 120° pour $t = 19$, on pourra donc arrêter l'autoclave au bout de 22 min (19 min + 3 mn).

2. a) Calculer g' fonction dérivée de g.

   $g(t) = 125 - 104e^{-0{,}16t}$,
   donc $g'(t) = 0 - 104 \times (-0{,}16)\mathrm{e}^{-0{,}16t} = 16{,}64\mathrm{e}^{-0{,}16t}$.

   b) Étudier le signe de g' sur $[0;+\infty[$.

   Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}16t} > 0$, donc $f'(t) > 0$.

   c) Déterminez la limite de g quand t tend vers l'infini.

   $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}16t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}16t} = 0$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 125$.

   d) Donner le tableau de variations de g.

t	0 $+\infty$
signe de $f'(t)$	+
variations de f	21 $\nearrow$ 125

3. Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120 °C.
   Calculer au bout de combien de temps dans cette modélisation, après le lancement de la stérilisation ($t = 0$), il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation aura été efficace.

   On cherche t tel que : $g(t) = 125 - 104\,\mathrm{e}^{-0{,}16t} > 120$
   $\Leftrightarrow -104\,\mathrm{e}^{-0{,}16t} > -5$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}16t} < \dfrac{5}{104} \approx 0{,}048$
   $\Leftrightarrow -0{,}16t < \ln(0{,}048) \approx -3{,}03$
   $\Leftrightarrow t > \dfrac{-3{,}03}{-0{,}16}$
   $\Leftrightarrow t > 18{,}9 \approx 19$.
   On pourra donc arrêter l'autoclave au bout de 22 min (19 min + 3 mn).

4. Calculez la vitesse moyenne d'évolution de la température entre les instants $t = 6$ et $t = 15$. On arrondira au centième de $°\mathrm{C} \cdot \mathrm{mn}^{-1}$.

   $v = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{g(15) - g(6)}{15 - 6}$
   $= \dfrac{-104(\mathrm{e}^{-0{,}16\times15} - \mathrm{e}^{-0{,}16\times6}}{9} \approx 3{,}38$.
   donc une vitesse de 3,38/min

5. Déterminez la vitesse instantanée de l'évolution de la température au bout de 6 minutes. On arrondira au centième de $°\mathrm{C} \cdot \mathrm{mn}^{-1}$.

   La vitesse instantanée est donnée par le nombre dérivé :
   $g'(6) = 16{,}64\mathrm{e}^{0{,}16\times6} \approx 6{,}37$ /min

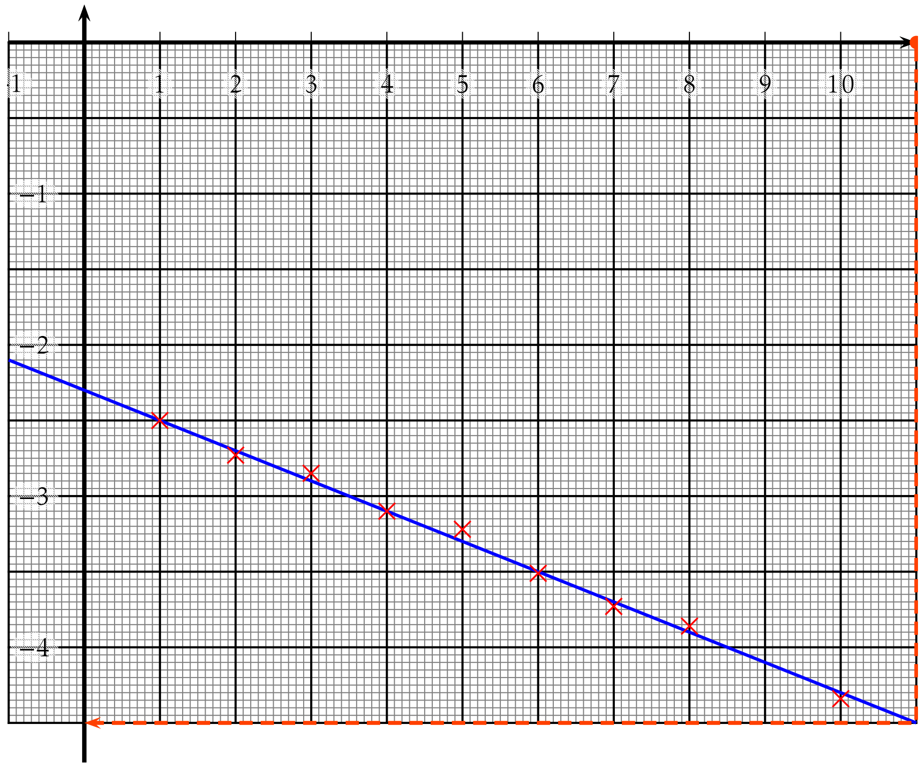
Partie C –

En expliquant vos arguments, dites laquelle des deux modélisations choisies vous parait la mieux adaptée.

La limite en $+\infty$ de la seconde modélisation semble plus réaliste.

Annexe

Graphique exercice 1.



Exercice 2. - 4.a

Étape i	u	S
1	29,10	59,10
2	28,23	87,33
3	27,38	114,71
4	26,55	141,27
5	25,76	167,03

Exercice 2. - 5.a

$u \leftarrow 30$
S $\leftarrow 30$
$n \leftarrow 0$
tant que S < 300 faire
    $u \leftarrow 0,97 \times u$
    $S \leftarrow S + u$
    $n \leftarrow n + 1$
fin tantque

Exercice 3.

Représentation graphique de la fonction g