		bilan des compétences	13
CHR	0	Chercher : Analyser un problèm...	0
MOD	0	Modéliser : Traduire en langag...	0
REP	8	Représenter : Choisir un cadre...	5,5
CAL	7	Calculer : Effectuer un calcul...	4,5
RAI	4	Raisonner : Utiliser les notio...	3
COM	0	Communiquer : Opérer la conver...	0
		bilan des connaissances	7
FCT03	1	Dérivées : u^n ; $\ln(u)$; $\exp(u$...	1
FCT05	2	Primitives : connaître les pri...	1,5
FCT10	2	Intégration : calculer l'intég...	1,5
FCT11	4	Intégration : Déterminer l'air...	3

	correction		
RAI	1.1 Méthode : dériver F		1
FCT03	drv e^u		1
CAL	calculs corrects + drv affine		1
FCT10	1.2 calcul intégrale : différence des primitives		0,5
CAL	calcul exact		0,5
CAL	calcul arrondi au centième		0,5
FCT11	interprétation graphique		1
CAL	1.3 calcul de la moyenne		0,5
	Total	6	
REP	2.1 nb dérivé = coeff directeur tangente		0,5
REP	vérif valeur		1
REP	2.2 signe dérivée => variations		0,5
RAI	conclusion		1
FCT11	2.3 F représente l'aire		0,5
RAI	F croissante		0,5
FCT11	2.4 aire car fct positive		0,5
RAI	Aire => intégrale + bornes ok		0,5
	total	5	
REP	3.1.a représentation graph. Rapide		1,5
REP	3.1.b lire limite		0,5
REP	Limite => asymptote		0,5
REP	3.1.c lire variations		0,5
REP	3.1.d lire le signe		0,5
FCT05	3.2 recherche prim $u'e^u$		0,5
FCT05	expression prim e^u		1
FCT10	expression F		1
CAL	calcul : diff des prim		0,5
CAL	calcul : valeur exacte		0,5
CAL	calcul : valeur approchée		1
FCT11	interprétation graphique		1
	total	9	

Co8

Pour ce contrôle une fiche d'aide au format A5 recto-verso est autorisée.

Exercice 1 — Valeur moyenne

6 points

extrait de Métropole-Réunion, septembre 2016, exercice 4

On injecte un antibiotique en perfusion au rythme de $0,32$ milligramme par minute. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80$$

et est positive sur $[0\,;+\infty[$.

On admet que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à

$$\frac{1}{300}\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(t) = 20\,000\,\mathrm{e}^{-0,004t} + 80t$ est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

$\mathrm{F}(t) = 20\,000\,\mathrm{e}^{-0,004t} + 80t$, donc $\mathrm{F}'(t) = 20\,000 \times (-0,004)\,\mathrm{e}^{-0,004t} + 80$ $= -80\,\mathrm{e}^{-0,004t} + 80$ $= f(t)$	donc $\mathrm{F}'(t) = f(t)$, cela signifie que F est une primitive de f.

2. En déduire la valeur de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Quelle interprétation graphique peut-on donner de l'intégrale I ?

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(300) - \mathrm{F}(0)$ $= 20\,000\,\mathrm{e}^{-0,004\times 300} + 80 \times 300$ $- \left(20\,000\,\mathrm{e}^{-0,004\times 0} + 80 \times 0\right)$ $= 20\,000\,\mathrm{e}^{-1,2} + 4\,000$ $= 10\,023,88$ (au centième).	Par définition du modèle, f est positive, donc l'intégrale représente l'aire du domaine défini par les droites d'équation $x = 0$, $x = 300$, l'axe des abscisses et la courbe de la fonction f.

3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les 5 premières heures de perfusion.

D'après l'énoncé la quantité moyenne se calcule : $\mu = \dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc $\mu = \dfrac{10\,023,88}{300} \approx 33,41$

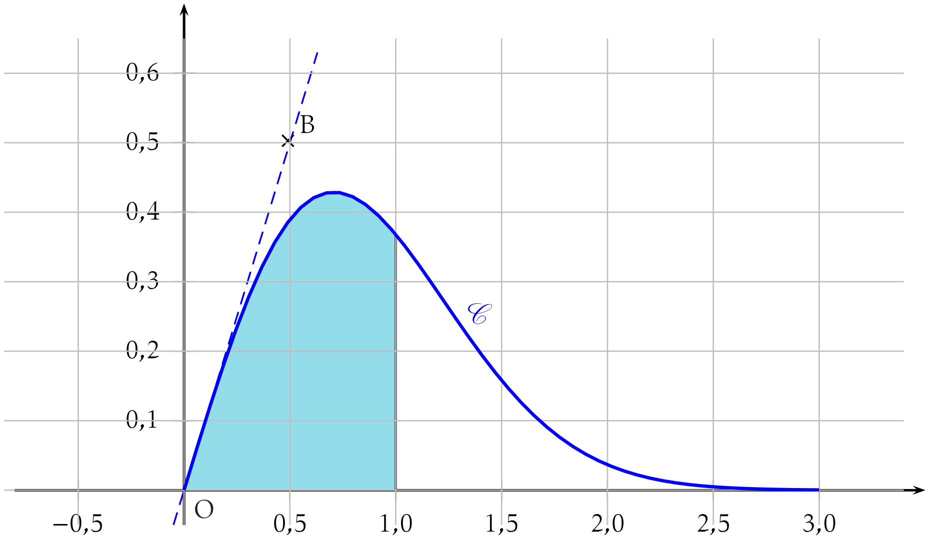
Exercice 2 — *5 points*

à partir de Polynésie, juin 2018, exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, on note f' sa fonction dérivée et F la primitive de f qui s'annule en 0. On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

Soit le point B$(0,5\,;0,5)$. La droite (OB) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

On nomme I l'aire située entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Ci-dessous, on a représenté la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (OB) :



Voici quatre affirmations concernant cette fonction f.

Indiquer sur la copie si l'affirmation proposée est vraie ou fausse. **Toute réponse sera justifiée.**

Affirmation 1. $f'(0) = 1$.

VRAI : le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente, la droite (OB) et il vaut 1.

Affirmation 2. pour tout x appartenant à $[0;3]$, $f'(x) \geqslant 0$.

FAUX : le signe de la fonction dérivée donne les variations de la fonction étudiée : ici la fonction est croissante puis décroissante, la dérivée change de signe !

Affirmation 3. pour tout x appartenant à $[0;3]$, F est croissante.

VRAI : l'aire sous la courbe ne fait qu'augmenter en fonction de x.

Affirmation 4. l'aire du domaine colorié se calcule grâce à la formule $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

VRAI : l'intégrale d'une fonction positive représente l'aire du domaine...

Exercice 3 — Étude d'une fonction

9 points

à partir de Antilles-Guyane, juin 2016, exercice 3

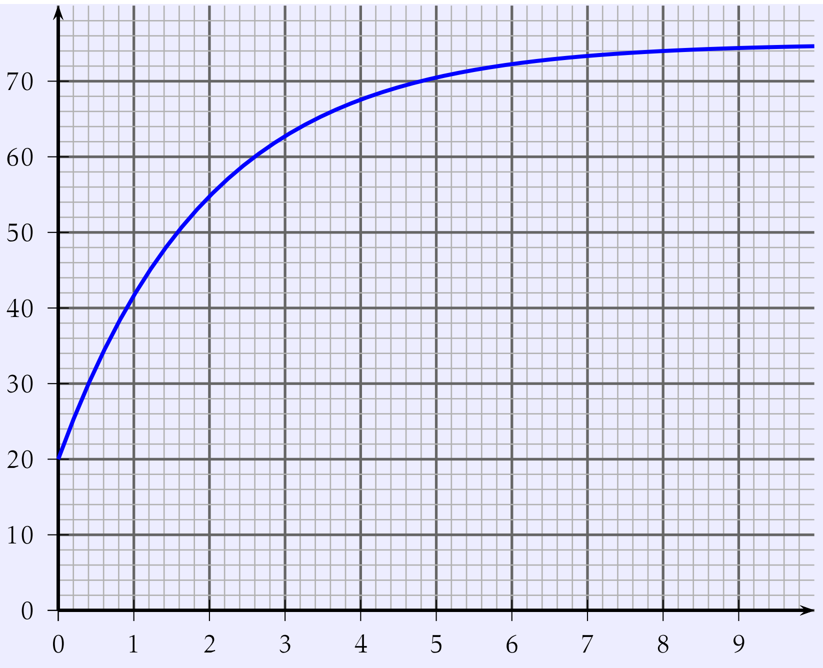
Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = -55\,\mathrm{e}^{-0,5t} + 75$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la calculatrice.

a) Représenter rapidement l'allure de la courbe de la fonction f dans un repère sur votre copie.



b) Lire la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $(\mathscr{C})$?

On lit $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 75$, cela signifie que la droite d'équation $y = 75$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c) Donner les variations de f sur $[0;+\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

d) Donner le signe de f sur $[0;+\infty[$.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a $f(x) \geq 0$.

2. Calculer, en détaillant, $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}).

Donner une interprétation graphique du résultat.

On cherche une primitive de f.
$-55\,\mathrm{e}^{-0,5t}$ est de la forme $\lambda u'(t)\mathrm{e}^{u(t)}$ avec $u(t) = -0,5t$, donc $u'(t) = -0,5$.
Il faut donc que $\lambda \times (-0,5) = -55$; donc $\lambda = \dfrac{-55}{-0,5} = 110$
Une primitive de $u'(t)\mathrm{e}^{u(t)}$ est $\mathrm{e}^{u(t)}$.
On en déduit que $\mathrm{F}(t) = 110\,\mathrm{e}^{-0,5t} + 75t$.
donc $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = 110\,\mathrm{e}^{-0,5\times 4} + 75 \times 4 - \left(110\,\mathrm{e}^{-0,5\times 0} + 75 \times 0\right) =$
$110\,\mathrm{e}^{-2} + 300 - 110 = 110\,\mathrm{e}^{-2} + 190 \approx 204,89$
La fonction f étant positive, l'intégrale représente l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.