
L'usine du Père Noël

Dans son usine, le Père Noël produit entre 0 et 10 000 cadeaux par jour. Le coût total de production (en euros) en fonction du nombre x de cadeaux est donné par la fonction :

$$C(x) = 16x^3 - 90x^2 + 100x + 1\,000$$

Le graphique donne une représentation de cette fonction.

remarque : les coûts de production relativement bas s'expliquent par l'exploitation des lutins...

Partie A – Lectures graphiques

10 points

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique et laisser apparent les « pointillés de lecture ».

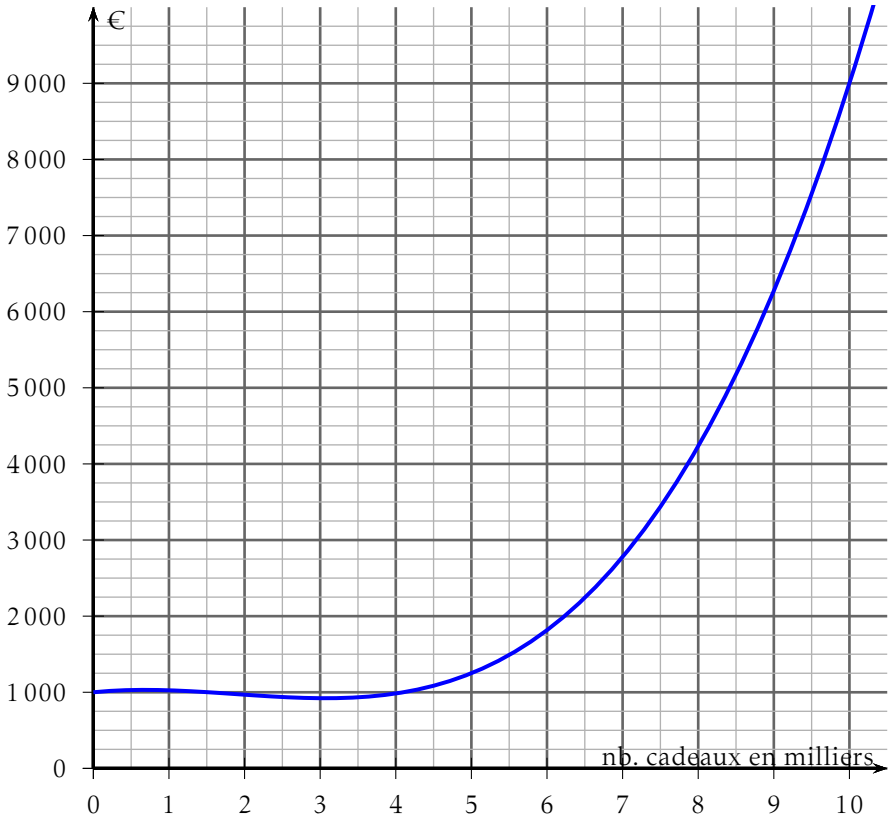
1. Quel est le coût de production de 0 cadeaux ? À quoi cela correspond-t-il ?
On lit 1 000 €, cela correspond aux charges fixes.
2. Quel est le coût de production de 7 000 cadeaux ?
On lit environ 2 800 €
3. La recette du Père Noël (eh oui : en réalité le Père Noël revend à bas prix les cadeaux aux parents...) est donnée par la fonction $R(x) = (500 + 25 \times m)x$ (où m représente votre mois de naissance).

Compléter le tableau suivant :

x	0	5	8	10
$R(x)$				

Tracer la fonction R sur le graphique.

4. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer pour quelles quantités de jouets le Père Noël réalise un bénéfice (positif).
5. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer la quantité de jouets à produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice.



mois	$R(x)$	bénéf. positif	$B(x)$	x_{max}	B_{max}
1	$525x$	[1 861; 7 973]	$525x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5392	1399
2	$550x$	[1 786; 8 137]	$550x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5465	1535
3	$575x$	[1 717; 8 295]	$575x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5537	1673
4	$600x$	[1 652; 8 448]	$600x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5607	1812
5	$625x$	[1 592; 8 596]	$625x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5676	1953
6	$650x$	[1 537; 8 739]	$650x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5744	2096
7	$675x$	[1 485; 8 879]	$675x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5811	2240
8	$700x$	[1 436; 9 015]	$700x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5876	2386
9	$725x$	[1 390; 9 148]	$725x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	5941	2534
10	$750x$	[1 347; 9 277]	$750x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	6005	2684
11	$775x$	[1 306; 9 404]	$775x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	6067	2834
12	$800x$	[1 268; 9 528]	$800x - 16x^3 + 90x^2 - 100x - 1000$	6129	2987

Partie B – Calculs

10 points

Le bénéfice se calcule à l'aide de la fonction B définie sur $[0; 10]$ par : $B(x) = R(x) - C(x)$.

1. Vérifier en détaillant les calculs l'expression de $B'(x)$ correspondant à votre mois de naissance.

mois	$B'(x)$
1	$-48x^2 + 180x + 425$
2	$-48x^2 + 180x + 450$
3	$-48x^2 + 180x + 475$
4	$-48x^2 + 180x + 500$
5	$-48x^2 + 180x + 525$
6	$-48x^2 + 180x + 550$
7	$-48x^2 + 180x + 575$
8	$-48x^2 + 180x + 600$
9	$-48x^2 + 180x + 625$
10	$-48x^2 + 180x + 650$
11	$-48x^2 + 180x + 675$
12	$-48x^2 + 180x + 700$

2. Étudier le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[0;10]$

m	Δ	r_1	r_2
1	114 000	5,39	-1,64
2	118 800	5,46	-1,71
3	123 600	5,53	-1,78
4	128 400	5,60	-1,85
5	133 200	5,67	-1,92
6	138 000	5,74	-1,99
7	142 800	5,81	-2,06
8	147 600	5,87	-2,12
9	152 400	5,94	-2,19
10	157 200	6,00	-2,25
11	162 000	6,06	-2,31
12	166 800	6,12	-2,37

3. Compléter le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$

x	0	10
signe de $B'(x)$		
variations de B		

4. En déduire le nombre de cadeaux qui donne le bénéfice maximal et calculer ce bénéfice.