# oO° Bac Blanc - TSTMG °Oo

Sujet à rendre avec la copie Numéro d'anonymat : . . . . . . . . . . . . . .

Le sujet comporte 6 pages.
**Seule l'annexe** est à rendre avec la copie.

Les calculs doivent être détaillés. Les calculatrices sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur, **mais les échanges sont interdits** !

Les exercices sont indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

## Exercice 1 —

*4 points*

d'après Métropole-Réunion- septembre 2015 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est correcte.*

*Relever sur votre copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est attendue.*

*Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Entre 2004 et 2014, le SMIC (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) mensuel brut est passé de 1 154 € à 1 445 €.

1. Selon une étude, le loyer moyen d'un studio en 2014 à Bordeaux est de 470 €. Quel pourcentage du SMIC (arrondi à 0,1 %) cela représente-t-il ?

   **a.** 40,7 % **b.** 4,7 % **c.** 32,5 % **d.** 3,07 %

   En 2014 le SMIC est à 1 445 €, donc le loyer représente $\dfrac{470}{1445} \approx 0{,}325$ soit 32,5 %

2. Quel est le taux d'évolution du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** 18,8 % **b.** 2,91 % **c.** 20,1 % **d.** 25,2 %

   taux d'évolution : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D} = \dfrac{1\,445 - 1\,154}{1\,154} \approx 0{,}252$ soit environ 25,2 %

3. Quel est le taux d'évolution annuel moyen du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** 2,3 % **b.** 25,2 % **c.** 1,4 % **d.** 2,5 %

   Entre 2004 et 2014 il y a 10 évolutions successives, donc
   $(1+t_m)^{10} = 1 + t_g$
   $\Leftrightarrow (1+t_m)^{10} = 1{,}252$
   $\Leftrightarrow t_m = (1{,}252)^{\frac{1}{10}} - 1$
   $\Leftrightarrow t_m \approx 0{,}023$ soit un taux moyen de 2,3 %

4. Entre 2013 et 2014, le SMIC a augmenté d'environ 1 %. En supposant que cette évolution annuelle se poursuive dans les cinq prochaines années, quelle serait la valeur du SMIC mensuel brut en 2019 (arrondie à l'euro) ?

   **a.** 1 517 € **b.** 1 450 € **c.** 2 327 € **d.** 1 519 €

   Augmenter de 1 % revient à multiplier par $\left(1 + \dfrac{1}{100}\right)$ c'est à dire par 1,01, donc en 5 années, le SMIC sera multiplié par $1{,}01^5 \approx 1{,}051$, suivant ce modèle en 2019 le SMIC sera à $1\,445 \times 1{,}051 \approx 1\,519$.

## Exercice 2 — *4 points*

Polynésie - juin 2014

*Cet exercice comporte deux parties largement indépendantes*

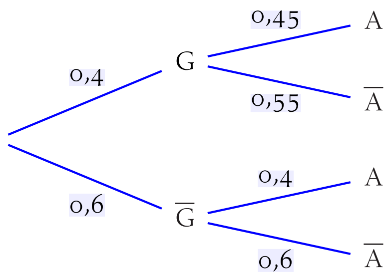
Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.
Les organisateurs estiment que 40 % des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.
De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45 % ont effectué un achat dans un des stands. Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60 % n'ont rien acheté.
On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.

On note

- G l'événement : « le visiteur a eu une entrée gratuite »,
- A l'événement : « le visiteur a effectué un achat ».

On notera $\overline{G}$ l'événement contraire de G et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1. Donner la valeur de la probabilité $P_G(A)$.
   $P_G(A)$ représente la probabilité d'avoir effectué un achat sachant que l'entrée est gratuite ; c'est 45 %.
2. Recopier et compléter *sur votre copie* l'arbre de probabilité ci-dessous




3. Calculer la probabilité de l'événement suivant : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».
   $P(\overline{G} \cap A) = P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(A) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$
4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est $0,42$.
   d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap G) + P(A \cap \overline{G}) = 0,4 \times 0,45 + 0,6 \times 0,4 = 0,18 + 0,24 = 0,42$
5. Calculer la probabilité que le visiteur ait payé son entrée sachant qu'il a effectué un achat. *On arrondira à* $0,01$ *près le résultat.*
   On cherche $P_A(\overline{G}) = \dfrac{P(A \cap \overline{G})}{P(A)} = \dfrac{0,24}{0,42} \simeq 0,57$

## Exercice 3 — *5 points*

Antilles-Guyane - juin 2014 *Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par tranches de cinq années, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2010.

| Année | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Nombre d'habitants (en milliards) : $y_i$ | 4,4 | 4,8 | 5,3 | 5,7 | 6,1 | 6,5 | 6,8 |

### Partie A –

**1.** Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ associé au tableau ci-dessus sur le repère donné en **Annexe**.

**2.** Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients obtenus seront arrondis au centième.
À l'aide de la calculatrice : $y = 0,41\,x + 4,03$

**3.** On modélise l'évolution de l'effectif $y$ de la population mondiale, exprimé en milliards, en fonction du rang $x$ de l'année par l'expression $y = 0,4\,x + 4$.

**a)** Représenter graphiquement, dans le repère donné en **Annexe**, la droite traduisant cette évolution.

**b)** En utilisant le modèle ci-dessus, estimer l'effectif de la population mondiale en 2015.
2015 correspond à l'indice 8, on calcule donc $0,4 \times 8 + 4 = 7,2$.
Donc la population estimée est de 7,2 milliards d'habitants.

**c)** Selon ce modèle, à partir de quelle année la population mondiale devrait-elle dépasser 8 milliards d'habitants ?
On cherche $x$ tel que $0,4x + 4 > 8$
$0,4x > 4 \Leftrightarrow x > 10$ ce qui correspond à 2025.

### Partie B –

À partir des données fournies dans le tableau de la partie A :

Calculer le taux global d'évolution de la population mondiale entre 1980 et 2010, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,01 %.
taux d'évolution : $\dfrac{6,8 - 4,4}{4,4} \simeq 0,55$ soit 55 % d'augmentation.

## Exercice 4 — *7 points*

d'après Nouvelle Calédonie - juin 2014

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques.

Le coût de production journalier, $\mathcal{C}$, en euros, de $x$ de ces pièces est donné, pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;25]$, par

$$\mathcal{C}(x) = x^3 - 13,5x^2 + 60x + 1\,000.$$

Chaque pièce est vendue 270 euros.

**Partie A –**

Un tableur a été utilisé pour calculer les coûts et les recettes qui figurent sur la feuille de calcul donnée en **Annexe**.

Dans cette feuille de calcul, deux valeurs ont été effacées.

1. Quel est le coût de production de 2 pièces ?
   Le coût de production est $\mathcal{C}(2) = 1\,074$ euros.
2. a) Quelle est la recette pour 2 pièces produites et vendues ?
   Chaque pièce est vendue 270 €, la recette est donc $2 \times 270 = 540$ euros.
   b) Donner la formule qui a été saisie dans la cellule `C2` puis recopiée vers le bas jusqu'à la cellule `C27` pour obtenir la recette selon le nombre de pièces produites et vendues.
   `=270*A2`
3. Pour 5 pièces produites et vendues, l'entreprise fait-elle un gain ? Justifier.
   On lit dans le tableur que le coût de production de 5 pièces est 1 087,5 et que la recette est 1 350, cette dernière est supérieur au coût de production, donc l'entreprise fait un gain.

**Partie B –**

1. Justifier, en détaillant les calculs, que le bénéfice est donné par :

$$\mathcal{B}(x) = -x^3 + 13{,}5x^2 + 210x - 1\,000$$

   pour tout $x \in [0\,;25]$
   $\mathcal{B}(x) = \mathcal{R}(x) - \mathcal{C}(x)$ où $\mathcal{R}$ représente la recette.
   $\mathcal{R}(x) = 270x$ donc
   $\mathcal{B}(x) = 270x - (x^3 - 13,5x^2 + 60x + 1\,000) = 270x - x^3 + 13,5x^2 - 60x - 1\,000 = -x^3 + 13,5x^2 + 210x - 1\,000$
2. La courbe représentative de la la fonction $\mathcal{B}$ est donnée en Annexe. À l'aide d'une lecture graphique, en laissant apparent les « traits de lecture », déterminer le nombre de pièces permettant d'obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice maximal.
   Lecture graphique : $x = 14$ et $\mathcal{B}(14) \approx 1\,850$
3. a) Calculer $\mathcal{B}'(x)$.
   $\mathcal{B}(x) = -x^3 + 13,5x^2 + 210x - 1\,000$.
   donc $\mathcal{B}'(x) = -3x^2 + 13,5 \times 2x + 210$
   $\mathcal{B}'(x) = -3x^2 + 27x + 210$
   b) Montrer que, pour $x \in [0\,;\,14]$, $\mathcal{B}'(x) \geqslant 0$ et que, pour $x \in [14\,;\,25]$, $\mathcal{B}'(x) \leqslant 0$.
   On cherche le signe de $\mathcal{B}'(x)$.
   C'est un polynôme du second degré, le coefficient de $x^2$ est $-3$ qui est négatif, donc la courbe représentative est une parabole orientée « vers le bas ».
   On cherche les valeurs qui annulent $\mathcal{B}'(x)$.
   $\Delta = 27^2 - 4 \times (-3) \times 210 = 3\,249$
   Comme $\Delta > 0$ il y a deux racines :
   $\alpha = \dfrac{-27 - \sqrt{3\,249}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-84}{-6} = 14$
   $\beta = \dfrac{-27 + \sqrt{3\,249}}{2 \times (-3)} = \dfrac{30}{-6} = -5$
   Donc $\mathcal{B}'(x) > 0$ sur $[-5\,;\,14]$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction $\mathcal{B}$ sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

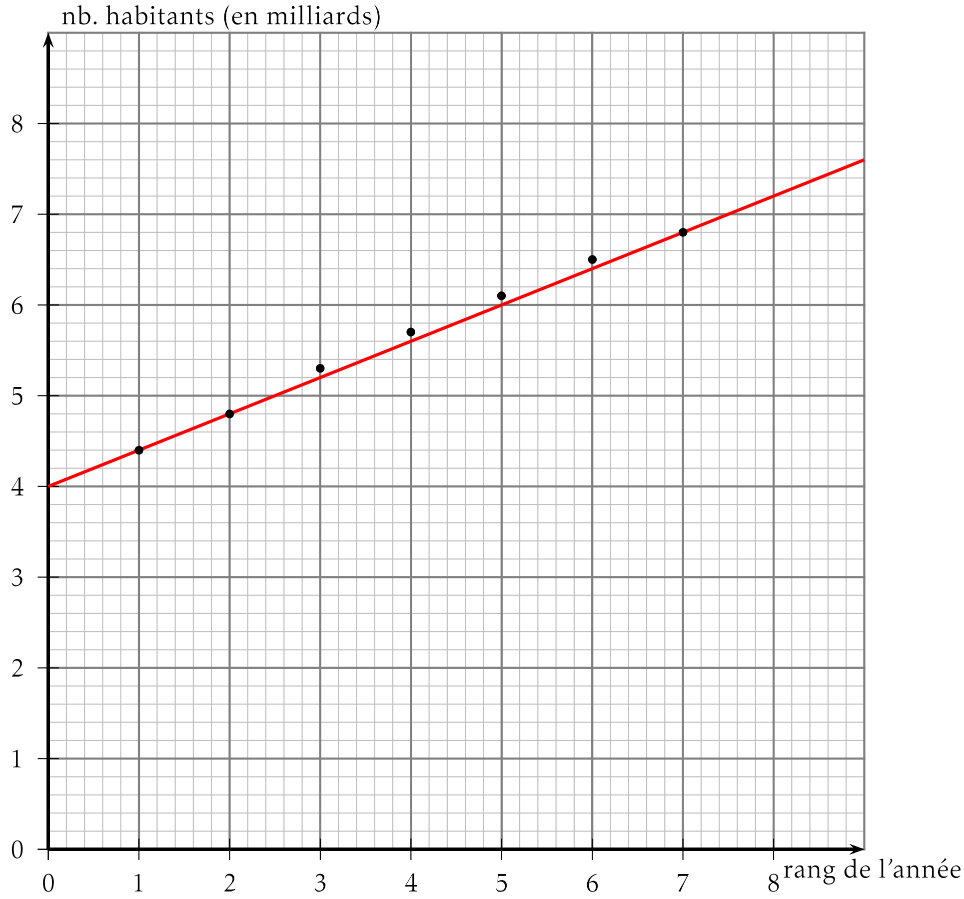
| $x$ | 0 | | 14 | | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $\mathcal{B}'(x)$ | | + | 0 | − | |
| variations de $\mathcal{B}'$ | $-1\,000$ | ↗ | 1 842 | ↘ | $-2\,937{,}5$ |

5. Pour quelle quantité de pièces produites et vendues le bénéfice est-il maximal ?
   Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ?
   Le bénéfice est maximal pour une production de 14 pièces ; il est alors de 1 842 €.

## ANNEXE à rendre avec la copie

Écrivez ici votre n° d'anonymat ..................

**Exercice 3.**



**Exercice 4.2**

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Nombre de pièces | Coût en euros | Recette en euros |
| 2 | 0 | 1000,0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 047,5 | 270 |
| 4 | 2 | | |
| 5 | 3 | 1 085,5 | 810 |
| 6 | 4 | 1 088,0 | 1 080 |
| 7 | 5 | 1 087,5 | 1 350 |
| 8 | 6 | 1 090,0 | 1 620 |
| 9 | 7 | 1 101,5 | 1 890 |
| 10 | 8 | 1 128,0 | 2 160 |
| 11 | 9 | 1 175,5 | 2 430 |
| 12 | 10 | 1 250,0 | 2 700 |
| 13 | 11 | 1 357,5 | 2 970 |
| 14 | 12 | 1 504,0 | 3 240 |
| 15 | 13 | 1 695,5 | 3 510 |
| 16 | 14 | 1 938,0 | 3 780 |
| 17 | 15 | 2 237,5 | 4 050 |
| 18 | 16 | 2 600,0 | 4 320 |
| 19 | 17 | 3 031,5 | 4 590 |
| 20 | 18 | 3 538,0 | 4 860 |
| 21 | 19 | 4 125,5 | 5 130 |
| 22 | 20 | 4 800,0 | 5 400 |
| 23 | 21 | 5 567,5 | 5 670 |
| 24 | 22 | 6 434,0 | 5 940 |
| 25 | 23 | 7 405,5 | 6 210 |
| 26 | 24 | 8 488,0 | 6 480 |
| 27 | 25 | 9 687,5 | 6 750 |

**Exercice 4.2**