DROITES DU PLAN ET SYSTÈMES

Compléments au cours du livre : Déclic, p. 187

Les exercices décorés et les fichiers GeoGebra associés sont à rendre pour le **Jeudi 18 juin**.

Rappels : Lors du chapitre « Vecteurs et repérage » nous avons découvert les notions suivantes :

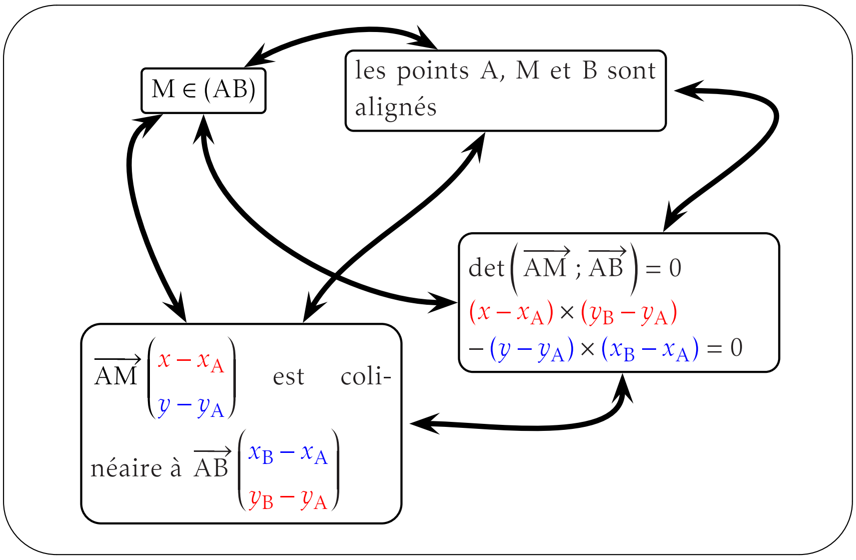
- Dans un repère, si les points A et B ont pour coordonnées respectives : $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $x \times y' - x' \times y = 0$.
- Les points A, M et B sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

1. Vecteur directeur d'une droite

2. Équation cartésienne d'une droite

Certains exercices de ce chapitre utilisent la notion de déterminant *deux vecteurs :* $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$*, il s'agit simplement d'effectuer le calcul* $x \times y' - x' \times y$*.*
Dire que le déterminant de deux vecteurs est nul équivaut à dire que les vecteurs sont colinéaires.

Une droite peut avoir plusieurs équations cartésiennes ! En effet :
$6x + 12y - 24 = 0$
$\Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -3x - 6y + 12 = 0$



Exercices ▶ ①

Dire que le point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à la droite (AB) est donc équivalent à :

$$(x - x_A) \times (y_B - y_A) - (y - y_A) \times (x_B - x_A) = 0$$

Développer l'expression et regrouper les éléments à l'aide des codes couleurs.

① exercices

▶ *p. 191 nº 1 : équation d'une droite passant par deux points. Aide : exercice corrigé au dessus.*

▶ *p. 193 nº 5.1 (corrigé dans le livre) : équation d'une droite passant par deux points.*

▶ *p. 200 nº 41 (corrigé dans le livre) : équation d'une droite passant par deux points.*

(ligne 1) essayer de comprendre d'où vient le +

$$\boxed{x} \times \boxed{(y_B - y_A)}$$
$$- \boxed{x_A} \times \boxed{(y_B - y_A)}$$
$$- \boxed{y} \times \boxed{(x_B - x_A)}$$
$$+ \boxed{y_A} \times \boxed{(x_B - x_A)} = 0 \text{ (ligne 1)}$$

$$\boxed{(y_B - y_A)} \times \boxed{x}$$
$$- \boxed{(x_B - x_A)} \times \boxed{y}$$
$$+ \boxed{y_A} \times \boxed{(x_B - x_A)}$$
$$- \boxed{x_A} \times \boxed{(y_B - y_A)} = 0$$

en posant $a = y_B - y_A$; $b = -(x_B - x_A)$ et $c = y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)$

on trouve $ax + by + c = 0$

3. Équation réduite d'une droite

L'idée : dans certains cas avoir une formule « plus simple » pour l'équation d'une droite.

3.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

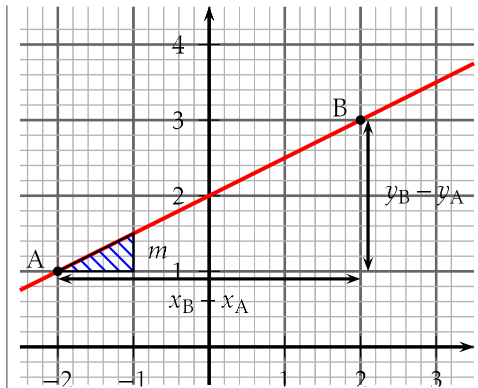
Dans un repère orthonormé classique, c'est une « droite verticale ».

3.2 Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Sur la figure, le triangle hachuré a pour base 1 unité et pour hauteur m unités. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{m}{1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

L'équation réduire de la droite (AB) s'écrit alors : $y = mx + p$.
Cette écriture est unique.



Exercices ► ②

1. Dans quel(s) cas ne peut-on pas calculer : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$? si $x_B = x_A$: impossible de diviser par 0.
2. En déduire le type de droite qui ne peut pas avoir une équation réduite de la forme $y = mx + p$. si $x_A = x_B$, la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.
3. p s'appelle « l'ordonnée à l'origine », c'est la valeur de y (ordonnée) quand $x = 0$ (origine). Sur la figure ci-contre,
   a) lire la valeur de p. $p = 2$
   b) En déduire une équation réduite de la droite (AB). $y = 0{,}5x + 2$

② exercices

► *p.204 n° 89 : lire équation réduite*
► *p. 204 n° 94 : équation réduite d'une droite, deux points donnés.*
► *p. 204 n° 95 : équation réduite d'une droite, deux points donnés.*

4. Système de deux équations à deux inconnues

4.1 Définitions

4.2 Interprétation graphique d'un couple solution

Passer par un support visuel permet de faire une idée de la solution.

4.3 Méthode de résolution d'un système

Exercices ► ③

③ exercices

► *p. 195 nº 6 (corrigé dans le livre) : résoudre un système.*

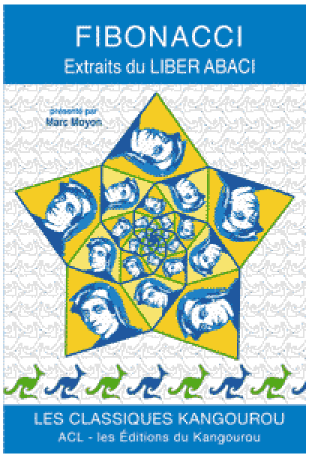
5. Exercices

5.1 Du temps de Fibonacci

Dans son livre *Liber Abaci* (le *livre du calcul*), en 1220, Léonard de Pise, dit Fibonacci, pose divers problèmes et explique comment les résoudre.

Baldassarre Boncompagni traduit le *Liber Abaci* en latin en 1857 : https://books.google.fr/books?id=w86fLKi88pYC&hl=fr

Et plus récemment, Marc Moyon en présente des extraits dans *Les Classiques du Kangourou*. http://www.mathkang.org/catalogue/prodkfib.html



Voici le problème de la page 325 de la traduction de Baldassarre Boncompagni :

De duobus hominibus habentibus denarios.

Dvo homines habebant denarios; quorum primus querit secundo 7, et proponit se habere quinques tantum quam ipse. Et secundus querit primo 5, et proponit se habere septies tantum quam ipse. Queritur quantitas denariorum uniuscuiusque : pone

Et une traduction possible :

« Deux hommes ont des deniers. Si le premier en demande 7 au deuxième, alors il en aura cinq fois plus que celui-ci. Si le second en demande 5 au premier, alors il en aura sept fois plus que celui-ci. On demande la quantité de deniers de chacun des deux. »

Pour tracer une droite à l'aide de la calculatrice, voir dans le livre les pages « J'étudie une fonction » du livret : pages XI, XIII, et XV.
Dans GeoGebra, il suffit d'écrire l'équation (cartésienne ou réduite) dans la ligne de saisie.

4. Soit x le nombre de deniers du premier homme et y le nombre de deniers du second.

   Montrer que x et y sont solutions de $\begin{cases} x-5y=-42 \\ 7x-y=40 \end{cases}$

   - La première phrase se modélise : $x+7=5(y-7)$
   - La seconde phrase se modélise : $y+5=7(x-5)$

   d'où le système :

   $$\begin{cases} x+7=5(y-7) \\ y+5=7(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5y-35-7 \\ y=7x-35-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-42 \\ 7x-y=40 \end{cases}$$

5. À l'aide du cours p. 194, identifier les réels a, b, a' et b', puis en déduire que ce système admet une unique solution.

   $a=1$, $b=-5$, $a'=7$ et $b'=-1$, donc $ab'-a'b=1\times(-1)-7\times(-5)\neq 0$.
   Le système admet un unique couple solution.

6. Déterminer les équations réduites de chacune des droites associée à chaque équation du système. Tracer ces droites à l'aide d'un logiciel (ou de la calculatrice) et lire les coordonnées du point d'intersection.

$$\begin{cases} 5y = x + 42 \\ y = 7x - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{42}{5} \\ y = 7x - 40 \end{cases}$$

On lit $x \approx 7{,}1$ et $y \approx 9{,}9$

7. En détaillant les calculs, déterminer les valeurs exactes de x et y.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{42}{5} \\ y = 7x - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 40 = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{42}{5} \\ y = 7x - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - \dfrac{1}{5}x = \dfrac{42}{5} + 40 \\ y = 7x - 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

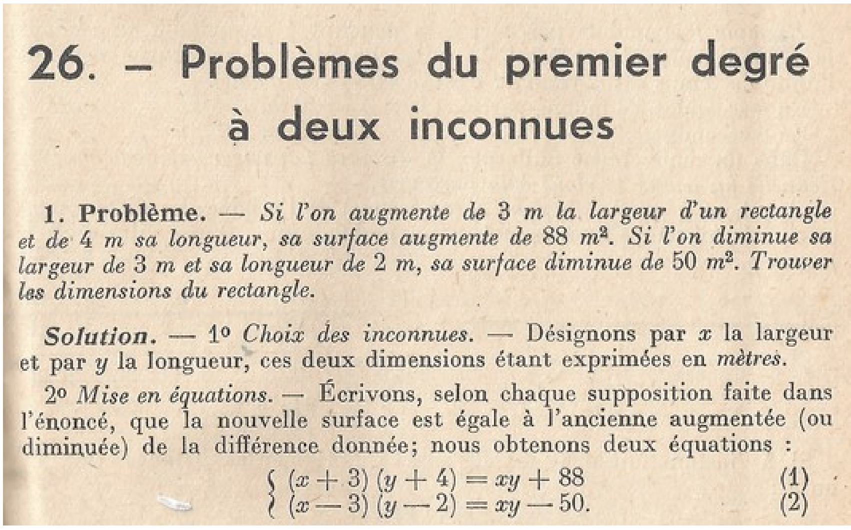
$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{34} \times \dfrac{242}{5} = \dfrac{121}{17} \\ y = 7 \times \dfrac{121}{17} - 40 = \dfrac{167}{17} \end{cases}$$

8. Le denier est une unité de monnaie. La plus petite unité de monnaie était le sou, il fallait 12 sous pour faire 1 denier (compter en douzaines était plus intéressant qu'en dizaine, car 12 a plus de diviseurs que 10). Le problème posé par Fibonacci est une histoire ancrée dans le réel, mais comment interpréter le résultat ?

Le résultat reste théorique, un denier ne pouvant être divisé en 17 ! Par contre la modélisation du problème est simple... Donc déjà à l'époque, on inventait des problèmes de mathématiques pseudo-concrets pour faire résoudre des équations !

5.2 Du temps de vos grand-parents

Un livre d'exercices d'*Algèbre* de 1951 : par chapitre, quatre ou cinq exercices corrigés comme exemples, puis une série d'exercices.



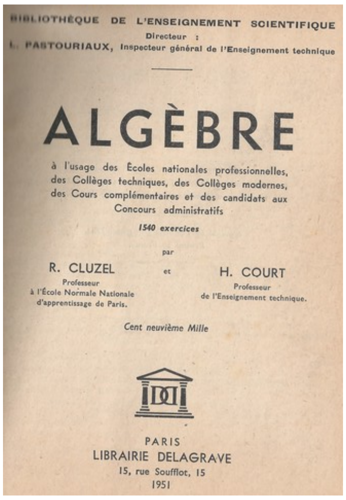
26. — Problèmes du premier degré à deux inconnues

1. Problème. — *Si l'on augmente de 3 m la largeur d'un rectangle et de 4 m sa longueur, sa surface augmente de 88 m². Si l'on diminue sa largeur de 3 m et sa longueur de 2 m, sa surface diminue de 50 m². Trouver les dimensions du rectangle.*

Solution. — 1° *Choix des inconnues.* — Désignons par x la largeur et par y la longueur, ces deux dimensions étant exprimées en *mètres*.

2° *Mise en équations.* — Écrivons, selon chaque supposition faite dans l'énoncé, que la nouvelle surface est égale à l'ancienne augmentée (ou diminuée) de la différence donnée; nous obtenons deux équations :

$$\begin{cases} (x+3)(y+4) = xy + 88 & (1) \\ (x-3)(y-2) = xy - 50. & (2) \end{cases}$$



Une équation réduite de droite est de la forme $y = mx + p$

Le système à résoudre est donc : $\begin{cases} (x+3)(y+4) = xy + 88 \\ (x-3)(y-2) = xy - 50 \end{cases}$

9. Écrire le système sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

$$\begin{cases}(x+3)(y+4)=xy+88\\(x-3)(y-2)=xy-50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+4x+3y+12-xy=88\\xy-2x-3y+6-xy=-50\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}4x+3y=76\\-2x-3y=-56\end{cases}$$

10. À l'aide du cours p. 194, justifier que ce système admet une unique solution.

on pose $a=4$; $b=3$; $a'=-2$ et $b'=-3$.
$ab'-a'b=4\times(-3)-(-2)\times 3=-6\neq 0$
Le système admet donc un unique couple solution.

11. Déterminer les équations réduites de chacune des droites associée à chaque équation du système. Tracer ces droites à l'aide d'un logiciel (ou de la calculatrice) et lire les coordonnées du point d'intersection.

$$\begin{cases}4x+3y=76\\-2x-3y=-56\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y=-4x+76\\-3y=2x-56\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}\\y=-\frac{2}{3}x+\frac{56}{3}\end{cases}$$

On lit $(x;y)=(10;12)$

12. En détaillant les calculs, déterminer les valeurs exactes de x et y.

$$\begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}\\y=-\frac{2}{3}x+\frac{56}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}\\-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}=-\frac{2}{3}x+\frac{56}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}\\-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x=\frac{56}{3}-\frac{76}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{76}{3}\\-\frac{2}{3}x=-\frac{20}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}y=-\frac{4}{3}\times 10+\frac{76}{3}\\x=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=12\\x=10\end{cases}$$

donc $x=10$ et $y=12$.

13. Conclure. le rectangle a un côté de 10 mètres et l'autre de 12 mètres.

5.3 De nos jours

On définit les droites : $d_{-6}: y=-6x-36$; $d_{-3}: y=-3x-9$; $d_3: y=3x-9$ et $d_6: y=6x-36$;

Aide :
- *coefficient directeur : livre p. 192*
- *résolution de système : livre p. 195*
- *pour tracer une droite dans GeoGebra, il suffit d'écrire l'équation (cartésienne ou réduite) de la droite dans la ligne de saisie.*

14. Déterminer le coefficient directeur de chacune de ces droites. Expliquer pourquoi elles ne sont pas parallèles deux à deux.

d_{-6} a pour coefficient directeur -6 ; d_{-3} a pour coefficient directeur -3 ; d_3 a pour coefficient directeur 3 et d_6 a pour coefficient directeur 6.
Chaque coefficient directeur est différent, aucune de ces droite n'est parallèle à une des autres.

15. Calculer les coordonnées des points A, B et C, points d'intersections respectif de d_{-6} et d_6 ; d_{-6} et d_3 ; d_{-6} et d_{-3}.

d_{-6} et d_6

$$\begin{cases} y = -6x - 36 \\ y = 6x - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -72 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 6x = y + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -36 \\ 6x = 0 \end{cases}$$

donc les coordonnées de A sont $(0;-36)$

d_{-6} et d_3

$$\begin{cases} y = -6x - 36 \\ y = 3x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -54 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 3x = y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -18 \\ 3x = -9 \end{cases}$$

donc les coordonnées de B sont $(-3;-18)$

d_{-6} et d_{-3}

$$\begin{cases} y = -6x - 36 \\ y = -3x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 & L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 3x = -y - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 \\ x = -9 \end{cases}$$

donc les coordonnées de C sont $(-9;18)$

16. Vérifier les coordonnées des points A, B et C en traçant ces quatre droites dans GeoGebra.

17. On remarque que les équations de ces droites sont de la forme : $d_a : y = a \times x - a^2$.

a) L'objectif de cette question est de tracer la *famille* des droites d_a pour toutes les valeurs de a allant de -6 à 6 avec un pas de $0{,}15$ (c'est à dire pour $a = -6$; $a = -5{,}85$; $a = -5{,}7$; ... ; $a = 6$).

La commande `Séquence` est une boucle *pour* dans GeoGebra.

En ligne de saisie :

`Séquence(y = a * x - a^2, a, -6, 6, 0.15)`

Vous n'avez tracé que des droites : que voyez-vous apparaître ?

une parabole !

b) Une autre famille de droites :

`d_a = Séquence(y = -a/sqrt(25-a^2) x + 25/sqrt(25-a^2 ), a, -5, 5, .2)`

- Donner l'expression des droites d_a en fonction de a.
  $y = -\dfrac{a}{\sqrt{25-a^2}}x + \dfrac{25}{\sqrt{25-a^2}}$
- À quel intervalle appartient le paramètre a ? $a \in [-5;5]$
- Donner les quatre premières valeurs prises par a. Quel(s) problème(s) va rencontrer GeoGebra ?
  $a = -5;-4{,}8;-4{,}6;-4{,}4$
  quand $a = \pm 5$, $\sqrt{25-a^2} = 0$, et on ne peut pas diviser par 0 !

1 Soient $A(-5;4)$, $B(2;3)$ et $C(-5;3)$.
Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

2 **1.** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $T(-10;5)$ et dont le vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $F(5;2)$ et $G(25;-2)$.
3. Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

3 Soient $M(-2;5)$, $N(8;0)$ et $P(-3;3)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par P et parallèle à la droite (MN).
2. Le point $R(15;-6)$ est-il sur la droite d ? Justifier.

4 Construire dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ les droites d_1 à d_6 d'équations cartésiennes ou réduites respectives $-3x+4y+9=0$; $x+2y+4=0$ et $2x-5=0$ puis $y=2x-1$; $y=4$ et $x=-2$.

5 On donne deux points $A(-42;20)$ et $B(30;-4)$.
1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
2. Construire la droite (AB) en utilisant son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

6 On considère les droites :
$$d_1 : 2x+y+1=0 \text{ et } d_2 : 4x+3y-11=0$$
1. Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2, en résolvant par substitution un système que l'on indiquera.

7 On considère les droites :
$$d_1 : 3x+4y-19=0 \text{ et } d_2 ; 5x-2y+3=0$$
1. Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2, en résolvant par combinaison linéaire un système que l'on indiquera.

Pour les exercices **41** et **42**, déterminer dans chaque cas une équation cartésienne de la droite (AB).

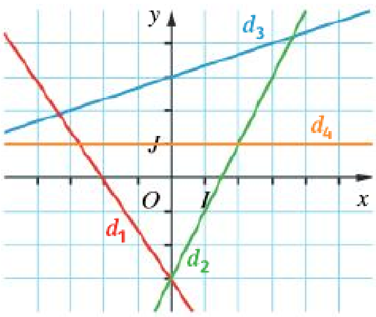
41 **1.** $A(2;1)$ et $B(5;-6)$
2. $A(-3;0)$ et $B(1;1)$

42 **1.** $A(-1;7)$ et $B(0;3)$
2. $A(6;8)$ et $B(3;2)$

43 Soient $A(-3;4)$, $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.
1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AC]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

44 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite d parallèle à la droite (AB) et passant par C.
1. $A(5;4)$; $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$
2. $A(-5;-1)$; $B(6;4)$ et $C(1;2)$

89 Par lecture graphique, préciser le coefficient directeur puis donner une équation réduite de chaque droite.



Dans les exercices **94** et **95** déterminer algébriquement l'équation réduite de la droite (AB).

94 **1.** $A(3;2)$ et $B(5;2)$ **2.** $A(14;3)$ et $B(4;9)$

95 **1.** $A(0{,}2;5)$ et $B(1;0{,}8)$ **2.** $A(3;6)$ et $B(1;6)$

96 Soient $A(3;-2)$, $B(9;2)$ et $C(-2;4)$.
1. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (CM).
3. Le point $D(30;-10)$ appartient-il à la médiane du triangle ABC issue de C ?