LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Question théorique

1.1 Une équation dont l'inconnue est une fonction

Remarque : si f est une fonction et f' sa fonction dérivée, on remarque que presque toujours : $f'(x) \neq f(x)$. En effet :

- $f(x) = 0$, a pour dérivée $f'(x) = 0$ donc ici $f'(x) = f(x)$
- $f(x) = k$ avec k un réel non nul, a pour dérivée $f'(x) = 0$ ici $f'(x) \neq f(x)$
- $f(x) = x^2$ a pour dérivée $f'(x) = 2x$
- $f(x) = \dfrac{3}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$
- $f(x) = (3x+2) \times \sqrt{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{9x+2}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{-14}{(x-4)^2}$

$f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$

donc $f'(x) = 3 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$

$f(x) = (3x+2) \times \sqrt{x}$

$u \times v$

$u'v + uv'$

$f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x+2)}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{6x + 3x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ $\quad \frac{u}{v}$

$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{3(x-4) - (3x+2) \times 1}{(x-4)^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{3x} - 12 \cancel{- 3x} - 2}{(x-4)^2} = \frac{-14}{(x-4)^2}$

Question : existe-t-il une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, autre que la fonction nulle qui soit égale à sa dérivée, c'est à dire telle que pour tout réel x on ait $f'(x) = f(x)$?

Dans cette équation l'inconnue est $\boxed{\textit{la fonction } f}$. nouveau = une équation dont l'inconnue est une fonction !!

1.2 Calcul d'images

⚠ Si la fonction existe alors il va se passer ce qui suit...

Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ~~telle que~~ qui soit égale à sa dérivée. C'est à dire telle que : qqsoit $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f'(x)$ et que $f(0) = 1$ (ce n'est donc pas la fonction nulle !).

L'idée est de calculer une valeur approchée des images.

Par définition : pour tout réel a, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (définition du nb dérivé)

Ce qui signifie que si « h est très petit » : $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Astuce de calcul pour simplifier le travail.

On va simplifier en admettant l'égalité pour *h très petit et strictement positif*, c'est à dire on va écrire : $f'(a) \boxed{=} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

1. En admettant l'égalité $f'(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, exprimer $f(a+h)$ en fonction de $f'(a)$ et $f(a)$.
2. Or la fonction f est telle que pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$. En déduire une expression de $f(a+h)$ en fonction de $f(a)$.
3. D'après cette relation, pour $h > 0$ et $f(a) > 0$, on a : $f(a+h) > f(a)$; donc la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$, car on a posé $f(0) = 1$, donc $f(0) > 0$.
4. Compléter les tableaux suivants (on devra s'aider d'un tableur).
   pour $h = 1$ (pour tester les formules, car 1 n'est pas « très petit »)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	4							

   pour $h = 0{,}1$ h est « petit », il faut ...lignes de tableur pour pouvoir remplir le deuxième tableau.

1) $f'(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$\Leftrightarrow h \times f'(a) = f(a+h) - f(a)$

$\Leftrightarrow h \times f'(a) + f(a) = f(a+h)$

$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + h \times f'(a)$

2) $f(a+h) = f(a) + h \times \boxed{f'(a)}$

$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + h \times \boxed{f(a)}$

$f'(a) = f(a)$ donc on remplace

$\Leftrightarrow f(a+h) = (1+h) f(a)$

3) $f(a+h) = \underbrace{(1+h)}_{>1 \text{ car } h>0} f(a)$

donc $f(a+h) > f(a)$

Bilan : si la fonction existe elle est croissante sur $[0;+\infty[$

x	0	0,1	0,2	0,3		0,9
$f(x)$	1	1,1	1,21			

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2,594	6,727							

pour $h = 0{,}01$ h est « très petit », il faut ...lignes de tableur pour pouvoir remplir le deuxième tableau.

x	0	0,01	0,02	0,03		0,09
$f(x)$	1	1,01	1,02			

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1,105	7,316							

1.3 Propriété

Rappel : f est dérivable et pour x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Calculer $h(0)$.
2. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = f(-x)$, en déduire $v'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Calculer la dérivée de h.
4. En déduire l'expression de h.

Ce qui permet de conclure : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) \neq 0$;

(b) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$: on pourra facilement compléter les tableaux de valeurs pour les valeurs de x négatives.

(c) donc $f(x) > 0$

1.4 Bilan

$\boxed{\text{Si}}$ il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

(a) pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$

(b) $f(0) = 1$

$\boxed{\text{Alors}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) > 0$,

(b) $f'(x) > 0$, c'est à dire f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(c) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$