LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Question théorique

1.1 Une équation dont l'inconnue est une fonction

Remarque : si f est une fonction et f' sa fonction dérivée, on remarque que presque toujours : $f'(x) \neq f(x)$. En effet :

- $f(x) = 0$, a pour dérivée $f'(x) =$ 0 donc ici $f'(x) = f(x)$
- $f(x) = k$ avec k un réel non nul, a pour dérivée $f'(x) =$ 0 ici $f'(x) \neq f(x)$
- $f(x) = x^2$ a pour dérivée $f'(x) =$ $2x$
- $f(x) = \dfrac{3}{x}$ a pour dérivée $f'(x) =$ $\dfrac{3}{x^2}$
- $f(x) = (3x+2) \times \sqrt{x}$ a pour dérivée $f'(x) =$ $\dfrac{9x+2}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$ a pour dérivée $f'(x) =$ $\dfrac{-14}{(x-4)^2}$

$f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$

donc $f'(x) = 3 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$

$f(x) = \underset{u}{(3x+2)} \times \underset{\times v}{\sqrt{x}}$

$u'v + uv'$

$f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x+2)}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{6x + 3x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ $\quad \frac{u}{v}$

$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{3(x-4) - (3x+2) \times 1}{(x-4)^2}$

$f'(x) = \frac{\overset{3x-12}{-3x-2}}{(x-4)^2} = \frac{-14}{(x-4)^2}$

Question : existe-t-il une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, autre que la fonction nulle qui soit égale à sa dérivée, c'est à dire telle que pour tout réel x on ait $f'(x) = f(x)$?

Dans cette équation l'inconnue est $\boxed{\text{la fonction } f}$. nouveau = une équation dont l'inconnue est une fonction !!

1.2 Calcul d'images

⚠ Si la fonction existe alors il va se passer ce qui suit...

Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ~~telle que~~ qui soit égale à sa dérivée. C'est à dire telle que : $f(x) = f'(x)$ et que $f(0) = 1$ (ce n'est donc pas la fonction nulle !).
qq soit $x \in \mathbb{R}$

L'idée est de calculer une valeur approchée des images.

Par définition : pour tout réel a, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (définition du nb dérivé)

Ce qui signifie que si « h est très petit » : $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Astuce de calcul pour simplifier le travail.

On va simplifier en admettant l'égalité pour *h très petit et strictement positif*, c'est à dire on va écrire : $f'(a) \boxed{=} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

1. En admettant l'égalité $f'(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, exprimer $f(a+h)$ en fonction de $f'(a)$ et $f(a)$.
2. Or la fonction f est telle que pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$. En déduire une expression de $f(a+h)$ en fonction de $f(a)$.
3. D'après cette relation, pour $h > 0$ et $f(a) > 0$, on a : $f(a+h) > f(a)$; donc la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$, car on a posé $f(0) = 1$, donc $f(0) > 0$.
4. Compléter les tableaux suivants (on devra s'aider d'un tableur).
pour $h = 1$ (pour tester les formules, car 1 n'est pas « très petit »)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	4	8						

pour $h = 0{,}1$ h est « petit », il faut ... lignes de tableur pour pouvoir remplir le deuxième tableau. ?

1) $f'(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$\Leftrightarrow h \times f'(a) = f(a+h) - f(a)$

$\Leftrightarrow h \times f'(a) + f(a) = f(a+h)$

$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + h \times f'(a)$

2) $f(a+h) = f(a) + h \times \boxed{f'(a)}$

$\Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + h \times \boxed{f(a)}$

$f'(a) = f(a)$ donc on remplace

$\Leftrightarrow f(a+h) = (1+h) f(a)$

3) $f(a+h) = \underbrace{(1+h)}_{>1 \text{ car } h>0} f(a)$

donc $f(a+h) > f(a)$

Bilan : si la fonction existe elle est croissante sur $[0;+\infty[$

A compléter pour lundi

tableau 2

x	0	0,1	0,2	0,3						0,9
$f(x)$	1	1,1	1,21							

tableau 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2,594	6,727							

pour h = 0,01 h est « très petit », il faut ... lignes de tableur pour pouvoir remplir le deuxième tableau. ?

tableau 4

x	0	0,01	0,02	0,03						0,09
$f(x)$	1	1,01	1,02							

tableau 5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1,105	7,316							

1.3 Propriété

Rappel : f est dérivable et pour x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Calculer $h(0)$.
2. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = f(-x)$, en déduire $v'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Calculer la dérivée de h.
4. En déduire l'expression de h.

Ce qui permet de conclure : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) \neq 0$;

(b) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$: on pourra facilement compléter les tableaux de valeurs pour les valeurs de x négatives.

(c) donc $f(x) > 0$

1.4 Bilan

$\boxed{\text{Si}}$ il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

(a) pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$

(b) $f(0) = 1$

$\boxed{\text{Alors}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) > 0$,

(b) $f'(x) > 0$, c'est à dire f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(c) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

3) dérivée de h

h est de la forme $u \times v$

avec $u(x) = f(x)$ donc $u'(x) = f'(x) = f(x)$ car $f = f'$

et $v(x) = f(-x)$; $v'(x) = -f(-x)$

4) On a donc $f(a+h) = (1+h)f(a)$

la seule info : $f(0) = 1$

donc pour $h = 1$

$f(1) = f(0+1) = (1+1)f(0)$

$f(1) = 2 \times 1 = 2$

il faut écrire f(2) = f(a+h)
et ici h =1, donc pas le choix a = 2

$f(2) = f(1+1) = (1+1) \times f(1)$

$f(2) = 2 \times 2 = 4$

$f(3) = f(2+1) = (1+1) \times f(2)$

$f(3) = 2 \times 4 = 8$

1) $h(x) = f(x) \times f(-x)$

donc $h(0) = f(0) \times f(-0)$

$h(0) = f(0) \times f(0)$

$h(0) = 1 \times 1 = 1$

2) $v(x) = f(-x)$

v de la forme $f(mx+p)$

avec $m = -1$ et $p = 0$

donc $v'(x) = m \times f'(mx+p)$

$v'(x) = -1 \times f(-1x+0)$

voir fin du fichier

car $f = f'$

$v'(x) = -f(-x)$

$h'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$h'(x) = f(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f(-x))$

$h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x)$

$h'(x) = 0$

or on sait que si la fonction dérivée est nulle, c'est que la fonction étudiée est constante.

donc h est une fonction constante, c'est à dire que quelque soit x, elle garde toujours la même valeur.
Si x = 0, on sait que h(x) = h(0) = 1

Donc quelque soit le réel x, on aura toujours h(x) = 1
C'est à dire f(x) * f(-x) = 1

$f(x) \times f(-x) = 1$ donc $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

- $f(x) \neq 0$ (sinon le produit est nul)
- comme $f(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$, $f(-x) > 0$
- donc $f(x) > 0$ mais $f = f'$

donc $f'(x) > 0$

donc f croissante.

$f(2) = f(1+1) = (1+h)\, f(1)$

or $h = 1$

et $f(1) = 2$

$f(2) = (1+1) \times 2 = 2 \times 2 = 4$

$f(3) = f(2+1) = (1+1)\, f(2) = 2 \times 4 = 8$

$f(4) = f(3+1) = (1+1)\, f(3) = 2 \times 8 = 16$

$f(5) = f(4+1) = (1+1)\, f(4) = 2 \times 16 = 32$

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

un idée de suite...
on garde cette idée
dans un coin de notre
tête...

Comme c'est assez répétitif : utilisons un tableur !

	A	B	C
1	fonction ..		
2	h	1	
3	x	f(x)	
4	0	1	
5	= A4 + B2	=(1+B2)*B4	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			

nouvelle valeur de x c'est (x + h)

d Dérivée de la composée avec une fonction affine

livre p106

Propriété (admise) On considère un intervalle I et a et b deux réels. Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax+b$ lorsque x décrit l'intervalle I.
Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a :

$$f'(x) = a \times g'(ax+b)$$

ici $\qquad v(x) = f(-1 \times x + 0)$

donc $v'(x) = -1 \times f'(-1 \times x + 0)$

$v'(x) = -f'(-x)$ mais ici $f' = f$

donc $v'(x) = -f(-x)$

livre : la fonction composée est f = c'est la composée de la fonction g et d'une fonction affine
ICI la fonction composée est v = c'est la composée de la fonction f et d'une fonction affine