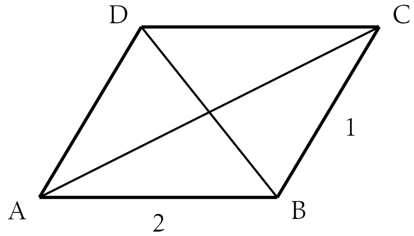
PRODUIT SCALAIRE

Ce chapitre est l'occasion de découvrir une nouvelle opération : *le produit scalaire*.

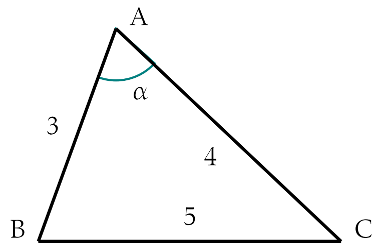
Le produit scalaire est une opération (fonction) qui prend en arguments *deux vecteurs* et qui renvoie *un réel*.

Comptine

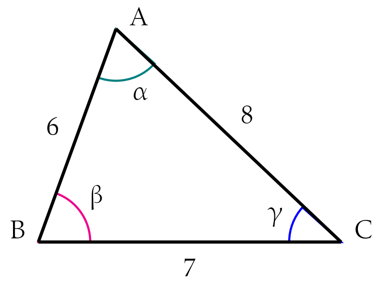
1 ; 2 ; … ABCD est un parallélogramme : calculer $AC^2 + BD^2$.
3 ; 4 ; 5… Déterminer la valeur de α en radians.
6 ; 7 ; 8 … Donner les valeurs des angles α, β et γ en radians.
9 ; 10 ; 11 Soient les droites : $D_1 : 10x - 9y + 11 = 0$ et $D_2 : y = 10x + 11y - 9 = 0$.
Déterminer leur positions relatives.
12 ; 13 E est le milieu de [AB], déterminer une mesure de l'ange α.



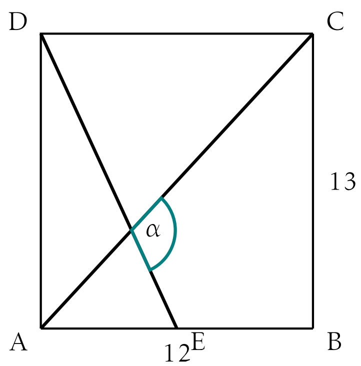
1 ; 2… *la figure n'est pas à l'échelle…*



3 ; 4 ; 5… *la figure n'est pas à l'échelle…*



6 ; 7 ; 8… *la figure n'est pas à l'échelle…*



12 ; 13

1. Produit scalaire dans le plan

1.1 Norme d'un vecteur

la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même norme.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Dans un repère orthonormé, avec $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$:

$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1.2 Définition du produit scalaire

Il existe quatre définitions du produit scalaire ! Elles sont équivalentes, mais suivant les situations l'une est préférable aux autres.

le produit scalaire se note · (un point).

L'angle géométrique est celui mesuré avec le rapporteur (en demi-cercle) : sa mesure est donc comprise dans $[0\,;\pi[$ (en radians).

- si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différents du vecteur nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

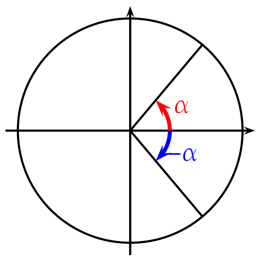
Cela revient à m'identifier comme M. Léon, *ou bien* Le prof de maths, *ou* papa… *selon le contexte, une dénomination est préférable à une autre, mais on parle toujours de la même personne.*

Remarques

a) **Symétrie du produit scalaire**
on sait que $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

b) **Opposé**
$\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|-\vec{v}\right\| \times \cos(\vec{u},-\vec{v})$
$\Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times (-\cos(\vec{u},\vec{v}))$
$\Leftrightarrow -\vec{u}\cdot\vec{v}$

c) **carré scalaire**
$\vec{u}\cdot\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos(\vec{u},\vec{u}) \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|^2 \times \cos 0 \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|^2$
On définit donc la *notation* $\vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$.



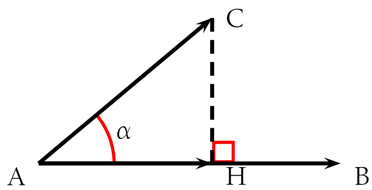
Attention : $\vec{u}^2$ est une ***notation*** *pour simplifier l'écriture $\vec{u}\cdot\vec{u}$. La notion de puissance n'existe pas avec le produit scalaire ! imaginons $\vec{u}^3$: $\vec{u}^3 = \left(\vec{u}^2\right)\cdot\vec{u}$. mais $\vec{u}^2$ est un réel et le produit scalaire ne s'applique qu'à deux vecteurs !*

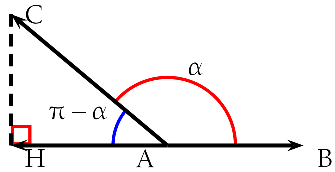
1.3 Orthogonalité et produit scalaire

Soient A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\alpha$.

- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors
  - $AH = AC \times \cos\alpha$ (schéma) ; donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$
  - et on a aussi : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos 0 = AB \times AH$;
  - donc dans ce cas $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors
  - $AH = AC\cos(\pi-\alpha) = -AC \times \cos\alpha$ (schéma) ; donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$
  - et on a aussi : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\pi = AB \times AH \times (-1) = -AB \times AH$;
  - donc dans ce cas $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$





Conclusion :

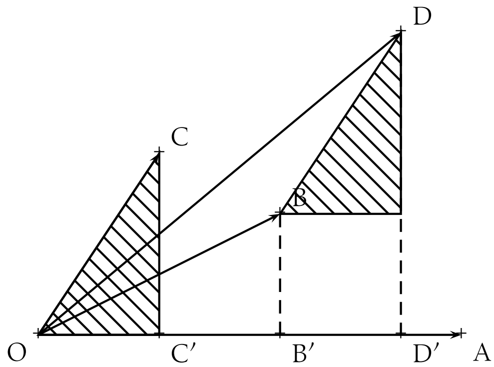
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ (avec H projeté orthogonal de C sur la droite (AB)).

Propriété

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

2. Bilinéarité

2.1 Démonstration dans un cas particulier



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = OA \times OD'$ (projeté ortho)

Ici (faire en exercice le cas où D′ est à une autre position)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = OA \times (OB' + B'D')$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = OA \times (OB' + OC')$ (les triangles hachurés sont isométriques).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = OA \times OB' + OA \times OC'$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

On admet que quelque soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

2.2 Bilinéarité du produit scalaire

On retrouve les techniques de développement avec les réels... adaptées au produit scalaire.

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k :

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Comptine « 12 ; 13 »

2.3 Identité scalaires remarquables

On parle parfois « d'identités scalaires remarquables » car on retrouve la même structure que les identités remarquables.

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v}$
$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
$=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

or $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}+\vec{v})^2$

donc $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

De même : $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

et : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Comptine « 1 ; 2 »

3. Propriétés du produit scalaire

3.1 Produit scalaire et normes

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2\right)$
$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Rappel : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

De même : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Remarque : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$
et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.
On retrouve le théorème de Pythagore !

3.2 Produit scalaire en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$:

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
- le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Donc

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right)$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(2xx'+2yy')$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

Comptine « 9 ; 10 ; 11 »

4. Calcul de longueurs et d'angles

4.1 Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

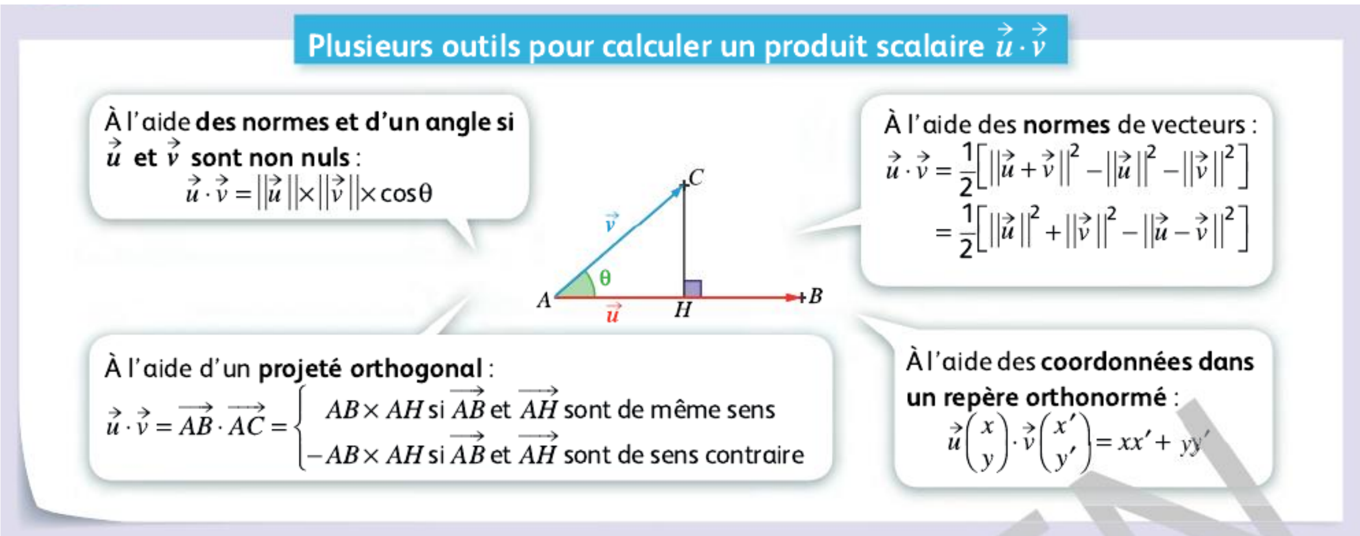
4.2 Formules d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle, en posant : $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$, on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Comptine « 6 ; 7 ; 8 »

Remarque : si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore



Déclic 1ere spé Maths, p 252