C01

NOM .... - Date de naissance ....

À chaque fois que vous voyez la lettre m dans un énoncé, il faut la remplacer par le numéro de votre mois de naissance (pour avril : $m = 4$; pour octobre $m = 10\dots$) ; de même il faut remplacer j par le numéro de votre jour de naissance.

Exercice 1 — Racines

6 points

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 11x - 26$.
   a) Montrer que f admet une racine évidente : x_1.
   $x_1 = 2$, en effet $f(2) = 2^2 + 11 \times 2 - 26 = 0$
   b) En déduire son autre racine : x_2.
   le produit des racines vaut -26, donc $x_2 = -13$
   c) Écrire f sous forme factorisée.
   $f(x) = (x-2)(x+13)$
2. Déterminer la forme factorisée du polynôme P du second degré vérifiant : $\mathrm{P}(m) = 0$; $\mathrm{P}(-2) = 0$ et $\mathrm{P}(0) = j$.
   m et -2 sont les racines de P, donc $\mathrm{P}(x) = k(x-m)(x-(-2))$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   $\mathrm{P}(x) = k(x-m)(x+2)$
   $\mathrm{P}(0) = j \Leftrightarrow k \times (-m) \times 2 = j \Leftrightarrow k = -\dfrac{j}{2m}$
   donc $\mathrm{P}(x) = -\dfrac{j}{2m}(x-m)(x+2)$

Exercice 2 — Polynômes anti-symétriques

6 points

Soit l'équation : $5x^2 + mx - 5 = 0$

1. Justifier que cette équation admet deux solutions.
   On reconnaît une équation du second degré avec $a = 5$; $b = m$ et $c = -5$
   $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times 5 \times (-5) = m^2 + 100$
   comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions.
2. Donner leur valeur exacte, puis la valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-m-\sqrt{m^2+100}}{2\times 5}$

$x_1 = \dfrac{-m-\sqrt{m^2+100}}{10}$

et $x_2 = \dfrac{-m+\sqrt{m^2+100}}{10}$

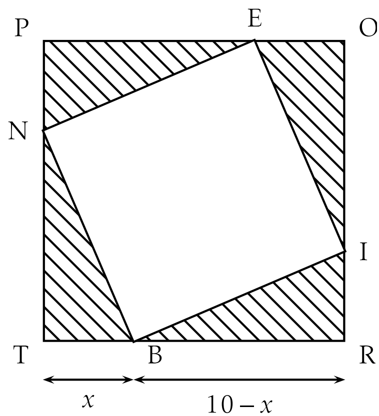
3. Pour $m = 14$, l'équation a pour solutions $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{74}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{74}}{5}$.
   Calculer $x_1 \times x_2$.

   Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-5}{5} = -1$, donc $x_1 \times x_2 = -1$.

Exercice 3 — Trop bien

6 points

Les dimensions sont indiquées sur la figure. TROP et BIEN sont des carrés ; $B \in [TR]$ et $TB = RI = OE = PN = x$.



1. Déterminer l'intervalle auquel apparient x.

   $x \in [0\,;10]$

2. Exprimer l'aire du triangle OIE en fonction de x.

   OIE est un triangle rectangle en O, donc : $\mathscr{A}_{\text{OIE}} = \dfrac{\text{OI}\times\text{OE}}{2} = \dfrac{(10-x)\times x}{2}$

3. En déduire que l'aire de BIEN en fonction de x est donnée par :
   $\mathscr{A}(x) = 100 - 20x + 2x^2$

L'aire de BIEN est égale à l'aire de TROP moins quatre fois celle de OIE (les quatre triangles grisés sont isométriques) ; donc
$\mathscr{A}(x) = 10^2 - 4 \times \dfrac{(10-x)\times x}{2}$
$\Leftrightarrow \mathscr{A}(x) = 100 - 2(10-x)\times x$
$\Leftrightarrow \mathscr{A}(x) = 100 - 20x + 2x^2$.

4. Déterminer, par le calcul, la (les) valeur(s) de x telle(s) que l'aire de BIEN soit la moitié de celle de TROP.

Il faut résoudre $\mathscr{A}(x) = 50$ (car l'aire de TROP vaut 100).
$100 - 20x + 2x^2 = 50$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 50 + 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$.
Donc l'aire de BIEN vaut la moitié de l'aire de TROP si $x = 5$.

Exercice 4 — Recherche rectangle *2 points*

Est-il possible de construire un rectangle de périmètre $p = 2m$ et d'aire $\mathscr{A} = 4m$?

Si oui donner sa longueur (L) et sa largeur (ℓ), sinon expliquer pourquoi la construction est impossible.

Soient $\mathrm{L} > 0$ la longueur et $\ell > 0$ la largeur du rectangle. Si le rectangle existe, on doit avoir $p = 2(\mathrm{L}+\ell) = 2m$ et $= \mathrm{L}\times\ell = 4m$.
$\mathrm{L}\times\ell = 4m \Leftrightarrow \mathrm{L} = \dfrac{4m}{\ell}$,
$2(\mathrm{L}+\ell) = 2m \Leftrightarrow \mathrm{L}+\ell = m$, en remplaçant L par $\dfrac{4m}{\ell}$, l'équation s'écrit :
$\dfrac{4m}{\ell} + \ell = m$
$\Leftrightarrow 4m + \ell^2 = m\times\ell$
$\Leftrightarrow \ell^2 - m\ell + 4m = 0$
$\Delta = (-m)^2 - 4\times 1\times 4m = m^2 - 16m$
pour $m \in [\![0;16[\![$ on a toujours $\Delta < 0$, donc la construction est impossible pour $m \in [\![0;12]\!]$.