C02

NOM ....- Date de naissance ....

À chaque fois que vous voyez la lettre m dans un énoncé, il faut la remplacer par le numéro de votre mois de naissance.

Exercice 1 — Déjà vu ?

7 points

1. Déterminer la forme factorisée du polynôme P du second degré vérifiant : $P(m) = 0$; $P(-1) = 0$ et $P(-2) = m$.

m et -1 sont les racines de P, donc $P(x) = k(x-m)(x-(-1))$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$P(x) = k(x-m)(x+1)$

$P(-2) = m \Leftrightarrow k \times (-2-m) \times (-1) = m \Leftrightarrow k = \dfrac{m}{m+2}$

donc $P(x) = \dfrac{m}{m+2}(x-m)(x+1)$

2. Déterminer deux réels y et z tels que leur somme soit égale à 14 et leur produit égal à $(13-m)$.

On cherche y et z tels que $S = y + z = 14$ et $P = yz = 13 - m$.

Donc y et z sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$.

$x^2 - 14x + (13-m) = 0$

$\Delta = (-14)^2 - 4 \times (13-m) = 196 - 52 + 4m = 144 + 4m = 4(36+m)$.

Comme $m \in [\![1\,;12]\!]$, $\Delta > 0$,

$y, z = \dfrac{-(-14) \pm 2\sqrt{36+m}}{2} = 7 \pm \sqrt{36+m}$

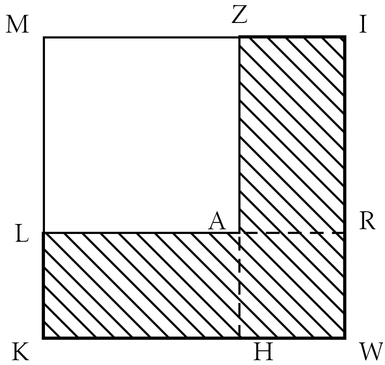
Exercice 2 — Gnomon

5 points

Sur la figure suivante : KWIM et WRAH sont des carrés ; KLAH et RAZI sont des rectangles tels que LA = AZ = m. L'aire du *gnomon* (la partie hachurée) est égale à 115 unités d'aires.

Déterminer (en détaillant les calculs et le raisonnement) la valeur exacte de AH.

Aide : l'aire de KWIM est égale à celle du carré ZALM et du *gnomon*.



x représente la longueur AH, donc $x \geqslant 0$.

$\mathscr{A}_{\text{KWIM}} = \mathscr{A}_{\text{ZALM}} + \mathscr{A}_{gnomon}$
$\mathscr{A}_{\text{KWIM}} = \mathscr{A}_{\text{ZALM}} + 115$

Puis

idée 1 : $\mathscr{A}_{\text{KWIM}} = \mathscr{A}_{\text{ZALM}} + 115$
$\mathscr{A}_{\text{KWIM}} = m^2 + 115$
$\text{KW}^2 = m^2 + 115$
donc $\text{KW} = \sqrt{m^2 + 115}$
$\Leftrightarrow m + x = \sqrt{m^2 + 115}$
$\Leftrightarrow x = -m + \sqrt{m^2 + 115}$

idée 2 : $\mathscr{A}_{\text{KWIM}} = \mathscr{A}_{\text{ZALM}} + 115$
$(m + x)^2 = m^2 + 115$
$m^2 + 2mx + x^2 = m^2 + 115$
$x^2 + 2mx - 115 = 0$
On reconnaît une équation du second degré de la forme :
$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$; $b = 2m$ et $c = -115$.
Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4 \times 1 \times (-115) = 4(m^2 + 115)$ est positif, donc l'équation admet deux solutions distinctes :
$x_1 = \dfrac{-2m - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = -m - \sqrt{m^2 + 115}$ et $x_2 = -m + \sqrt{m^2 + 115}$.
seule la solution x_2 est positive.

Conclusion :

mois	x_2
1	$-1+\sqrt{116}\approx 9{,}77$
2	$-2+\sqrt{119}\approx 8{,}91$
3	$-3+\sqrt{124}\approx 8{,}14$
4	$-4+\sqrt{131}\approx 7{,}45$
5	$-5+\sqrt{140}\approx 6{,}83$
6	$-6+\sqrt{151}\approx 6{,}29$
7	$-7+\sqrt{164}\approx 5{,}81$
8	$-8+\sqrt{179}\approx 5{,}38$
9	$-9+\sqrt{196}=5$
10	$-10+\sqrt{215}\approx 4{,}66$
11	$-11+\sqrt{236}\approx 4{,}36$
12	$-12+\sqrt{259}\approx 4{,}09$

Exercice 3 — QCM

8 points

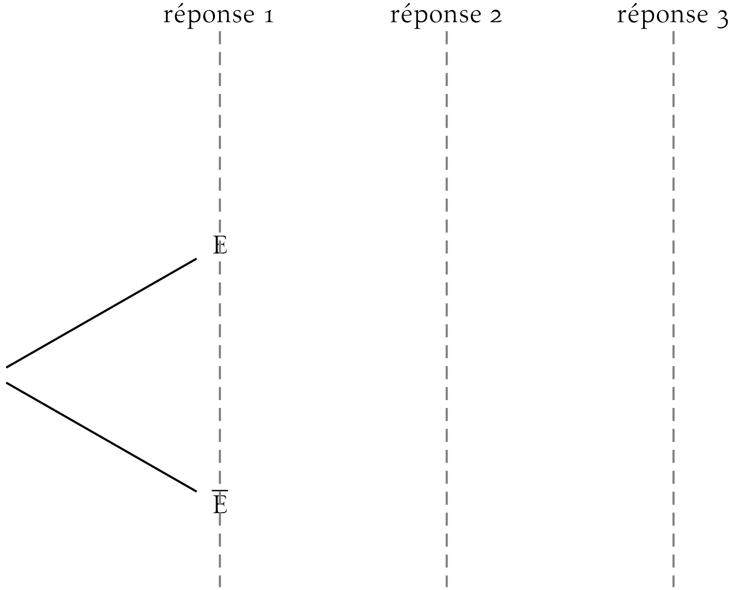
Une épreuve d'examen comporte un QCM composé de trois questions. Chaque question donne trois propositions de réponses, dont une seule est exacte.

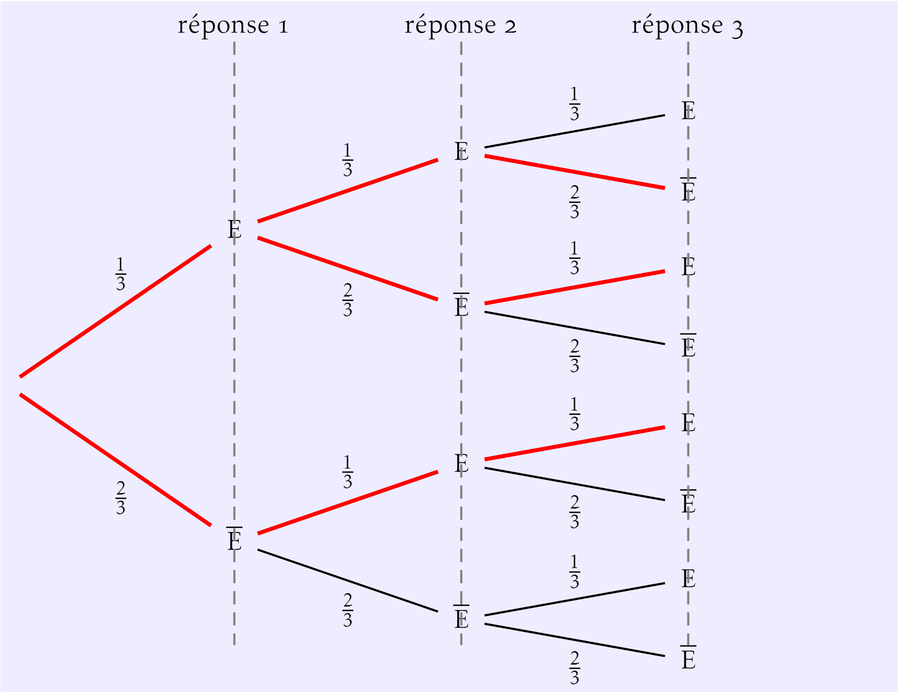
On suppose que le candidat répond au hasard à chaque question et qu'il répond à toutes les questions.

On appelle E l'événement « la réponse choisie est exacte ».

1. Donner la probabilité pour une question donnée qu'il choisisse la réponse exacte.
$P(E)=\dfrac{1}{3}$

2. Compléter l'arbre pondéré décrivant toutes les réponses possibles du QCM.





3. Repasser sur l'arbre le(s) chemin(s) associé(s) à l'événement F : « Les trois réponses sont fausses ». En déduire la valeur exacte de la probabilité d'obtenir les trois réponses fausses (la valeur approchée est 0,296).

   produit des probas sur les branches : $P(F) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

4. Déterminer par le calcul la valeur exacte de la probabilité de l'événement M : « Au moins une des réponses est correcte. »

   L'événement M est le contraire de l'événement F, donc $P(M) = 1 - P(F) = \dfrac{19}{27}$

5. **a)** Repasser le(s) chemin(s) correspondant à 2 réponses exactes et 1 inexacte.

   lecture de l'arbre : 3 chemins

   b) En déduire la valeur exacte de la probabilité de l'événement D : « Avoir *exactement deux* réponses exactes ».

   $P(D) = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$

6. Sachant que la première réponse est exacte, calculer la probabilité de l'événement « Avoir *au moins* deux réponses exactes parmi les trois. ».

À partir du nœud E de la première question, les chemins possibles sont :

E – E de proba $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$;

E – $\overline{\text{E}}$ de proba $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

$\overline{\text{E}}$ – E de proba $\dfrac{2}{9}$,

donc la probabilité d'avoir au moins deux réponses exactes, sachant que le première est exacte, est $\dfrac{1}{9} + 2 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9}$.