Co6

NOM ....- Date de naissance ....

Note sur 25 - contrôle en distanciel.

1. Avant de commencer un exercice, remplacer m par le numéro de votre mois de naissance.
2. Comme annoncé dans le mail du 26 novembre à destination des élèves, des parents et de la direction, seuls les devoirs répondant aux critères des travaux en distanciels sont pris en compte.
   Exception possible : rendre le travail sur feuille samedi 13/02 avant 12h30.

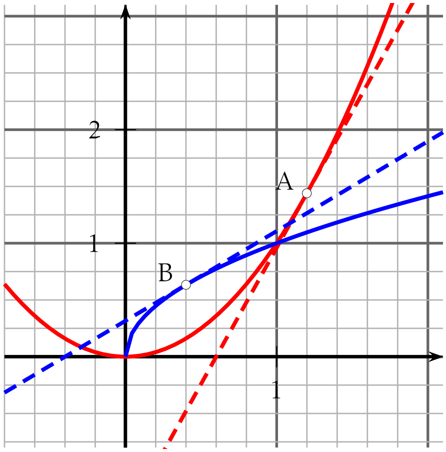
Exercice 1 — Recherche de tangentes

10 points

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentatives.

1. Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
   $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ on sait que $f'(a) = 2a$,
   donc $y = 2a(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$
2. Soit b un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b.
   $y = g'(b)(x-b) + g(b)$ on sait que $g'(b) = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$,
   donc $y = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}(x-b) + \sqrt{b} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}x + \dfrac{\sqrt{b}}{2}$
3. Rappeler la propriété que vérifient les coefficients directeurs de deux droites parallèles.
   Si deux droites sont parallèles, leurs coefficients directeurs sont égaux.
4. Soit $a = \dfrac{m}{13}$ et T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
   a) À l'aide d'un logiciel, représenter $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et T_a. Puis chercher le(s) réel(s) b tel(s) que la tangente T_b à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b soit parallèle à T_a.

Exemple :
dans la figure ci-contre, avec $a = 1{,}2$: si $b = 0{,}4$ alors T_a n'est pas parallèle à T_b. Il faut donc tester avec une autre valeur de b.



b) Déterminer la (les) valeur(s) exacte(s) de b en résolvant une équation.

on cherche b tel que $\dfrac{2m}{13} = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{b} = \dfrac{13}{4m} \Rightarrow b = \dfrac{169}{16m^2}$.

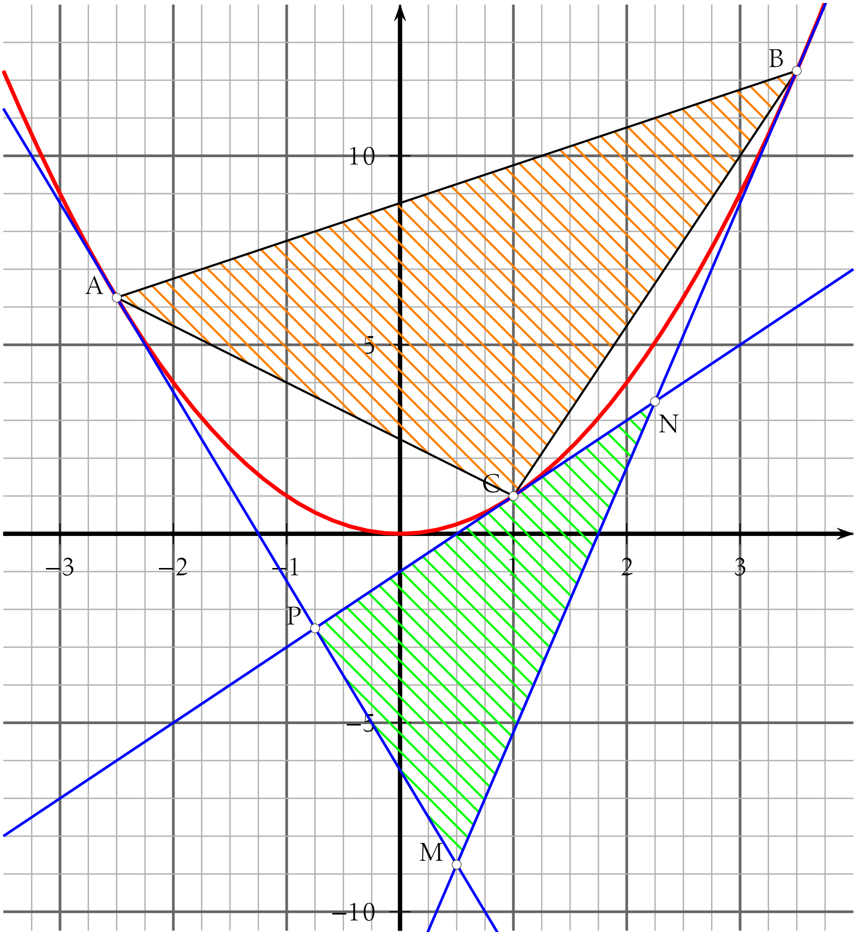
mois	b	
1	$\frac{169}{16}$	10,56
2	$\frac{169}{64}$	2,64
3	$\frac{169}{144}$	1,17
4	$\frac{169}{256}$	0,66

mois	b	
5	$\frac{169}{400}$	0,42
6	$\frac{169}{576}$	0,29
7	$\frac{169}{784}$	0,22
8	$\frac{169}{1024}$	0,17

mois	b	
9	$\frac{169}{1296}$	0,13
10	$\frac{169}{1600}$	0,11
11	$\frac{169}{1936}$	0,09
12	$\frac{169}{2304}$	0,07

Exercice 2 — Parabole et triangles

15 points



Les points A, B et C sont trois points quelconques sur la parabole d'équation $y = x^2$. T_A, la tangente en A coupe la tangente en B en M ; T_B, la tangente en B coupe la tangente en C en N et T_C, la tangente en C coupe la tangente en A en P.

On cherche une relation entre l'aire de ABC et celle de NMP.

1. Reproduire la figure à l'aide d'un logiciel, expérimenter avec divers points A, B et C et émettre une conjecture concernant les aires des triangles. (Inutile d'envoyer le fichier, je vérifierai vos compétences informatiques lors d'un temps de présence au lycée.)

2. Démonstration dans un cas particulier.

Les points A, B et C ont pour abscisses respectives $a = -\dfrac{m}{4}$; $b = \dfrac{7}{2}$ et $c = 0$.

a) Déterminer les équations réduites des tangentes T_A, T_B et T_C.

f est la fonction carrée, donc pour tout réel a, $f'(a) = 2a$.

$T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$ (exercice fait en classe)

mois	T_A
1	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$
2	$y = -x - \frac{1}{4}$
3	$y = \frac{-3}{2}x + \frac{-9}{16}$
4	$y = -2x - 1$
5	$y = \frac{-5}{2}x + \frac{-25}{16}$
6	$y = -3x + \frac{-9}{4}$

mois	T_A
7	$y = \frac{-7}{2}x + \frac{-49}{16}$
8	$y = -4x - 4$
9	$y = \frac{-9}{2}x + \frac{-81}{16}$
10	$y = -5x + \frac{-25}{4}$
11	$y = \frac{-11}{2}x + \frac{-121}{16}$
12	$y = -6x - 9$

$T_B : y = 2bx - b^2 \Leftrightarrow y = 7x - \dfrac{49}{4}$

$T_C : y = 2cx - c^2 \Leftrightarrow y = 0$

b) En déduire les coordonnées exactes des points M, N et P.

La méthode la plus rapide : reprendre les calculs faits en exercice.

Le point $M(x;y)$ appartient à T_A, ses coordonnées doivent vérifier $y = 2ax - a^2$; il appartient aussi à T_B, ses coordonnées doivent vérifier $y = 2bx - b^2$

d'où le système d'équations : $\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2bx - b^2 \end{cases}$

en procédant par substitution :

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 2ax - a^2 = 2bx - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 2(a-b)x = a^2 - b^2 \end{cases}$$

or $a \neq b$, donc on peut diviser par $(a-b)$: $x = \dfrac{a+b}{2}$,

puis $y = 2a \times \dfrac{a+b}{2} - a^2 \Leftrightarrow y = a^2 + ab - a^2 \Leftrightarrow y = ab$

Les tangentes à la parabole en $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$ se coupent en M de coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2};ab\right)$.

Donc M a pour coordonnées $\left(\dfrac{14-m}{8};-\dfrac{7m}{8}\right)$

De même, les coordonnées de P sont $\left(-\dfrac{m}{8};0\right)$

et celles de N sont $\left(\dfrac{7}{4};0\right)$

mois	x_M	y_M	x_P
1	$\frac{13}{8}$	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-1}{8}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-1}{4}$
3	$\frac{11}{8}$	$\frac{-21}{8}$	$\frac{-3}{8}$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{-7}{2}$	$\frac{-1}{2}$
5	$\frac{9}{8}$	$\frac{-35}{8}$	$\frac{-5}{8}$
6	1	$\frac{-21}{4}$	$\frac{-3}{4}$

mois	x_M	y_M	x_P
7	$\frac{7}{8}$	$\frac{-49}{8}$	$\frac{-7}{8}$
8	$\frac{3}{4}$	-7	-1
9	$\frac{5}{8}$	$\frac{-63}{8}$	$\frac{-9}{8}$
10	$\frac{1}{2}$	$\frac{-35}{4}$	$\frac{-5}{4}$
11	$\frac{3}{8}$	$\frac{-77}{8}$	$\frac{-11}{8}$
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{-21}{2}$	$\frac{-3}{2}$

c) Placer les points A′ et B′ projetés orthogonaux de A et B sur l'axe des abscisses. Calculer l'aire du trapèze AA′B′B, en déduire celle de ABC.

$A'\left(-\frac{m}{4};0\right)$ et $B'\left(\frac{7}{2};0\right)$ donc $A'B' = \frac{14+m}{4}$.

L'aire du trapèze : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(AA' + BB') \times A'B'$

$\mathscr{A}(ABC) = \mathscr{A} - \mathscr{A}(AA'C) - \mathscr{A}(BB'C)$

mois	$A'B'$	$\mathscr{A}$	$\mathscr{A}(AA'C)$	$\mathscr{A}(BB'C)$	$\mathscr{A}(ABC)$
1	$\frac{15}{4}$	$\frac{2955}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{105}{64}$
2	4	25	$\frac{1}{16}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{7}{2}$
3	$\frac{17}{4}$	$\frac{3485}{128}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{357}{64}$
4	$\frac{9}{2}$	$\frac{477}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{63}{8}$
5	$\frac{19}{4}$	$\frac{4199}{128}$	$\frac{125}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{665}{64}$
6	5	$\frac{145}{4}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{105}{8}$
7	$\frac{21}{4}$	$\frac{5145}{128}$	$\frac{343}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{1029}{64}$
8	$\frac{11}{2}$	$\frac{715}{16}$	4	$\frac{343}{16}$	$\frac{77}{4}$
9	$\frac{23}{4}$	$\frac{6371}{128}$	$\frac{729}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{1449}{64}$
10	6	$\frac{111}{2}$	$\frac{125}{16}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{105}{4}$
11	$\frac{25}{4}$	$\frac{7925}{128}$	$\frac{1331}{128}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{1925}{64}$
12	$\frac{13}{2}$	$\frac{1105}{16}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{343}{16}$	$\frac{273}{8}$

d) Justifier que l'aire de MNP est celle donnée dans le tableau.

mois	$\mathscr{A}(MNP)$
1	$\frac{105}{128}$
2	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{357}{128}$
4	$\frac{63}{16}$

mois	$\mathscr{A}(MNP)$
5	$\frac{665}{128}$
6	$\frac{105}{16}$
7	$\frac{1029}{128}$
8	$\frac{77}{8}$

mois	$\mathscr{A}(MNP)$
9	$\frac{1449}{128}$
10	$\frac{105}{8}$
11	$\frac{1925}{128}$
12	$\frac{273}{16}$

$$\mathscr{A}(\mathrm{MNP}) = \frac{1}{2}\mathrm{NP} \times |y_{\mathrm{M}}| = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{8} + \frac{7}{2}\right) \times \frac{m}{4} \times \frac{7}{2}$$

mois	NP	hauteur	$\mathscr{A}(\mathrm{MNP})$
1	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{105}{128}$
2	2	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{17}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{357}{128}$
4	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{63}{16}$
5	$\frac{19}{8}$	$\frac{35}{32}$	$\frac{665}{128}$
6	$\frac{5}{2}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{105}{16}$
7	$\frac{21}{8}$	$\frac{49}{32}$	$\frac{1029}{128}$
8	$\frac{11}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{77}{8}$
9	$\frac{23}{8}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{1449}{128}$
10	3	$\frac{35}{16}$	$\frac{105}{8}$
11	$\frac{25}{8}$	$\frac{77}{32}$	$\frac{1925}{128}$
12	$\frac{13}{4}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{273}{16}$

e) Confirmer ou infirmer la conjecture faite à la question 1.

On vérifie que $\dfrac{\mathscr{A}(\mathrm{ABC})}{\mathscr{A}(\mathrm{MNP})} = 2$

Corrections

3 élèves ne rendent rien... Les copies non notées (NN) sont celles des élèves qui n'ont pas respecté les consignes de travail en distanciel (je fatigue).

Pour plus de détails, voir le fichier tableur (.ods) car la page web (.html) est moins complète.

AM.Yo : 10/25 : Essaye de grouper tous les .pdf en un seul fichier.

- Exercice 1.1 : l'équation réduite doit être de la forme $y = mx + p$.
- 1.2 : même remarque. Il faut travailler avec b au lieu de a.
- 1.4.a : mois de naissance ?
- Exercice 2.2.a : équation *réduite*. / T_C : attention calculs !
- 2.2.b : il faut trouver les coordonnées *exactes* des points en résolvant un système !
- fin : tu dois effectuer les calculs à l'aide des coordonnées *exactes* sinon tu ne démontres rien. Erreur de raisonnement à la fin.

BE.Im : 17/25 : bon travail. Attention calculs avec des fractions / travaille en valeurs exactes. air**e** des figures !

ligne 12 à ligne 17 : calculs faux... étonnamment l'équation de la tangente est correcte...

ligne 35 : as-tu cherché le nombre de solution et leur valeur approchée ?

ligne 45 : mois de naissance ? Il faut travailler en valeur exacte !

ligne 64 : le coefficient directeur est un réel : pas d'unité.

ligne 66 - 70 : rédaction : ce sont les air**e**s des triangles que tu compares.

ligne 96 : tu dois écrire un *système* d'équations.

ligne 113 et lignes 119 - 148 : simplifie la fraction

ligne 58 ? : aire du trapèze : utilise les coordonnées des points !

ligne 58 et suivante : il faut travailler avec les valeurs exactes !

ligne 100 : comment obtiens-tu les valeurs de PN et HB ? ?

ligne 111 : tu travailles en valeurs approchées, donc tu ne démontres pas.

CH.Pe : 22/25 :Très bon travail. TBien rédigé / TBien présenté ! Félicitations. Revoir la dernière question.

ligne 23 : mois de naissance ?

ligne 46 : notation maladroite : A est le point, donc son abscisse ne peut pas s'écrire A, écrire a ou x_A ou ...

ligne 50 : attention quand tu soulignes, j'ai lu $\frac{-9}{-2}$.

ligne 56 : il faut écrire un *système d'équations*. TBien l'idée de travailler le cas général.

ligne 61 : précise que $(a-b) \neq 0$, sinon tu ne peux pas diviser.

ligne 66 : détaille le calcul de l'ordonnée.

ligne 67 : donc donne les coordonnées avec tes valeurs.

ligne 80 : ne fais pas un schéma avec un triangle particulier (on croit que (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.)

ligne 95 : il faut calculer l'aire de MNP, *puis* vérifier que cette aire est la moitié de celle de ABC ; sinon tu ne démontres rien.

DI.Di : NN : ne JAMAIS déposer de documents dans l'application « Casier » de l'ENT. Elle est très mal faite ! ! Respecte les consignes ! Je ne sais pas pourquoi tes mails ne partent pas, le poids des fichiers est Tbien. Nomme correctement tes fichiers.

- Exercice 1.1 : je demande l'équation dans le cas général ! (en a). Équation, donc $y = \ldots$
- Exercice 2.2.a : équation de T_A et T_B, erreurs de signe. T_C, équation ?
- 2.2.b : précise que cette formule n'est vraie que pour les tangentes à la parabole d'équation $y = x^2$! et reprend la démonstration faite en exercice. Écriture des fractions ! ! Cordonnées de M à revoir. Les points N et P sont sur l'axe des abscisses, donc leur ordonnée est nulle ! !
- 2.2.c : erreur de signe.
- Trop d'erreurs de calcul.

DU.Ao : 13/25 : Bravo pour MarkDown. Bien pour l'exercice 1 / Erreurs de calculs et de raisonnement dans l'exercice 2.

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement). *Équation réduite* : de la forme $y = mx + p$.
- Exercice 2.2.a : calcul dans T_A : $f(-1) = (-1)^2 = 1$ / T_B : erreur de signe / T_C est confondue avec l'axe des abscisses, son équation est $y = 0$.
- 2.2.b : il faut trouver les valeurs exactes des coordonnées à l'aide d'un calcul et non d'une lecture de GGB.
- 2.2.d : raisonnement ! On veut montrer que l'aire de ABC est le double de celle de MNP, donc on ne peut utiliser cette relation !

GA.Te : NN : Travail incomplet, rendu en retard et le fichier n'est pas nommé correctement !

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement). *Équation réduite* : de la forme $y = mx + p$.
- Exercice 2 : je ne comprends à quelles questions tu réponds.

GO.Em : 06/25 : des erreurs de calculs et de raisonnement !

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement). *Équation réduite* : de la forme $y = mx + p$.
- 1.3 : oui, donc pour les coefficients directeurs ?
- Exercice 2.2.a : T_A : Que fais-tu ? ? ? tes f deviennent des f', tu développes n'importe quoi ! ! C'est $f'(-3) = -6$ et $f(-3) = 9$! ! / T_B : erreur de signe / T_C : équation, donc $y = \dots$
- 2.2.b : Il faut *calculer* les coordonnées des points, pas les *lire* dans GGB.
- 2.2.c : *Calcule* l'aire du trapèze.
- 2.2.d : erreur de raisonnement ! ! On veut montrer que c'est le double.

LE.Ke : 05/25 : Merci de réduire le poids de la photo ! Comprends-tu ce que tu écris ?

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement). *Équation réduite* : de la forme $y = mx + p$.
- 1.3 : oui, donc pour les coefficients directeurs ?
- Exercice 2.2.a : calculs incohérents.

LE.Ti : NN : Devoir rendu hors délais. Erreurs de calcul ! Il manque la fin ?

ligne 9 : erreur de signe.

ligne 10 : calcul incohérent avec ligne 9. Équation : $y = \dots$

ligne 15 : calculs incohérents avec lignes suivantes.

ligne 31 : attention $2a = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$

ligne 54 : Bonne idée ! exceptée l'erreur de signe dans la formule de l'exercice 1... Équation donc $y = \dots$

ligne 84 : erreur de signe corrigée ? ! ? / Il faut écrire un système.

ligne 150 : P appartient à l'axe des abscisses, donc $y_P = 0$! !

ligne 166 : aire du trapèze : utilise les coordonnées exactes.

ligne 175 et suivantes : coordonnées exactes.

NG.Da : 11/25 : Bravo : il seul fichier .pdf ! Revoir l'exercice 2 : tu ne démontres rien.

- Exercice 1.1 :*équation* donc $y = \dots$.
- 1.2 : calcul incohérent à la fin.
- 1.3 : oui, mais cela ne répond pas à la question.
- 1.4.b : pourquoi un système ? ?
- Exercice 2.2.a : pourquoi le calcul $m = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$? ?
- 2.2.b : Il faut trouver les coordonnées des points à l'aide d'un système d'équations !
- 2.2.c : valeurs exactes ! / Aire de ABC : quelle base et quelle hauteur ?
- 2.2.d : valeurs exactes ?
- 2.2.e : tu ne démontres rien.

PH.Ji : 21/25 : Très bon travail ! Félicitations !

ligne 36 : il faut écrire un *système* et expliquer ce que tu calcules.

ligne 69 : quelle formule utilises-tu ?

RO.Ki : 11/25 : bien pour ce qui est fait. Revoir exercice 2.

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement).
- 1.2 : ne change pas b en B dans les calculs.
- 1.4 : $a = \dfrac{m}{13}$
- Exercice 2.2.a : *équation* de T_C, donc $y = \dots$
- 2.2.b : rédaction : coordonnées entre parenthèses. Il faut *calculer* les coordonnées.
- fin exercice 2 : il faut calculer ! tu ne démontres rien.

RO.Io : 10/25 : Des incohérences (dans les formules) et des erreurs de calcul ! Revoir la rédaction.

- Exercice 1.1 : revoir la formule : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit cohérent, une droite est la représentation d'une fonction affine, donc l'équation doit être de la forme $y = mx + p$.
- 1.2 : idem
- 1.3 : *parallèle* ne signifie pas *confondue* !
- Exercice 2.1 : revoir la notion « d'influence ». Soit plus précis dans la formulation de la conjecture.
- 2.2 : sans les parenthèses, le calcul est faux $-\frac{3^2}{4} \neq \dfrac{9}{16}$ / Formule des équation de la tangente correcte... incohérence avec exercice 1 ! / Erreurs de calcul.
- 2.2.b : pour les coordonnées de M, il faut résoudre un système.
- 2.2.c : notations : [AA′] est un segment / AA′ est une longueur. Un segment ne peut pas être négatif (ni positif) / il manque des parenthèses.
- 2.2.d : c'est l'idée, mais c'est très mal rédigé !

SR.Ph : 10/25 : Bravo : un seul fichier .pdf ! Bien rédiger. Revoir l'exercice 2 : il faut calculer pour démontrer.

- Exercice 1.1 : tu peux utiliser les formules vues en cours (et donc ne pas rechercher la limite du taux d'accroissement). L'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.
- 1.2 : Attention $b \in]0;+\infty[$ et non $\mathbb{R}$! !
- Exercice 2.1.a : équation de T_A : erreur de signe. Équation : $y = \dots$ / T_B : mêmes remarques.
- 2.2.b : il faut calculer les coordonnées exactes !
- jusqu'à la fin : il faut *calculer* les valeurs exactes des aires. Tu ne démontres rien.

TA.Da : 16/25 : ce qui est fait est bien. Revoir la fin de l'exercice 2.

- Exercice 1.2 : ne mélanges pas b et B dans l'équation ! Pourquoi un système ? ?
- Exercice 2.2.b : écris le système. Tu ne peux pas écrire des combinaisons de lignes s'il n'y a pas de système ! point N : équation fausse.
- 2.2.c : comment obtiens-tu les longueurs des bases et de la hauteur ? Tu trouves une aire négative ! ! Cela ne te dérange pas ?
- 2.2.d : ce n'est pas y_M mais $|y_n|$.

TO.Ja : NN : rendu hors délais. Tu dois travailler en valeurs exactes, donc avec des fractions, sinon tu ne démontres rien.

- Exercice 1.2 : écris l'équation sous la forme $y = mx + p$.
- Exercice 2 : air**e** du triangle.
- 2.2.a : je demande les valeurs *exactes*, donc travaille en fraction.
- 2.2.b : pourquoi la moitié ? Revoir l'exercice fait en classe. Il faut les valeurs exactes !

WO.Ya : 09/25 : Essaye de grouper les .pdf en un seul fichier. Tu *vérifies* des calculs à l'aide de valeurs approchées, mais tu ne *démontres* pas !

- Exercice 1.1 : TBien, mais tu peux utiliser le résultat du cours : pour la fonction carré, le nombre dérivé en a est $2a$. Simplifie l'expression de la tangente. L'équation *réduite* est de la forme $y = mx + p$.
  Mêmes remarques pour la fonction racine carrée.
- Exercice 2.2.a : T_B, erreur de signe / T_A travaille avec des fractions (ou des décimaux, mais sans arrondir) / T_C a pour équation $y = \ldots$
- 2.2.b : il faut les valeurs *exactes* des coordonnées ! Donc il faut résoudre un système.
- 2.2.c : valeur *exacte* de l'aire. Ce n'est pas le bon trapèze.
- Tu ne démontres rien si tu travailles avec les valeurs approchées données par le logiciel !