DM03 : CORRECTION

Exercice 1 — p. 32 n° 184 *5 points*

$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$

1. a) 2 est une racine de f signifie que $f(2) = 0$.
   $f(2) = -2 \times 2^2 + 5 \times 2 - 2 = 0$.
   Donc 2 est une racine de f.

   b) Comme 2 est un racine, on peut factoriser f par $(x-2)$.
   $f(x) = (x-2)(ax+d) = ax^2 + (d-2a)x - 2d$.
   En identifiant les coefficients : $a = -2$; $d - 2a = +5$ et $-2d = -2$, donc $d = 1$.
   $f(x) = (x-2)(-2x+1)$

2. a) Posons $\text{A} = (x+3)(-2x^2 + 5x - 2)$
   $\text{A} = (x+3)(-2x^2 + 5x - 2)$
   $\Leftrightarrow \text{A} = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 3 \times (-2x^2) + 3 \times 5x - 3 \times 2$
   $\Leftrightarrow \text{A} = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$.

   b) $-2x^3 - x^2 + 13x - 6 = 0$
   $\Leftrightarrow (x+3)(-2x^2 + 5x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow (x+3)(x-2)(-2x+1) = 0$
   $\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $-2x + 1 = 0$
   Les solutions de l'équation sont donc -3 ; 2 et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 — p. 32 n° 186 *15 points*

1. Par construction : $x \in [0;8]$.
2. Les parterres de fleurs sont les deux carrés. L'aire de celui en haut à gauche est x^2, celle de celui en bas à droite est $(8-x)^2$.
   Donc $\text{A}(x) = x^2 + (8-x)^2 = x^2 + 64 - 2 \times 8x + x^2 = 2x^2 - 16x + 64$.
3. La forme canonique de A est $a(x-\alpha)^2 + \beta$.
   $\text{A}(x) = 2(x^2 - 8x + 32) = 2(x^2 - 2 \times 4 \times x + 32)$
   $\Leftrightarrow \text{A}(x) = 2((x-4)^2 - 16 + 32) = 2((x-4)^2 + 16)$
   $\Leftrightarrow \text{A}(x) = 2(x-4)^2 + 32$

4. **a)** $A(x)$ égale à l'aire du jardin :
$A(x) = 8^2 \Leftrightarrow A(x) = 64$
Ici c'est la forme développée qui est la plus adaptée (présence de 64).
$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 64 = 64$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 8) = 0$
donc A est égale à l'aire du jardin si $x = 0$ ou si $x = 8$ (ce qui était évident étant donné la configuration !)

b) $A(x)$ égale à la moitié de l'aire du jardin :
$A(x) = 32 \Leftrightarrow 2(x - 4)^2 + 32 = 32$
Ici c'est la forme canonique qui est la plus adaptée (présence de 32).
$\Leftrightarrow 2(x - 4)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$
dans A est égale à la moitié de l'aire du jardin si $x = 4$.

c) $A(x)$ est égale au quart de l'aire du jardin :
$A(x) = 16$, ici c'est la forme canonique est qui la plus adaptée (on espère trouver une équation de la forme $a^2 - b^2 = 0$).
$A(x) = 16 \Leftrightarrow 2(x - 4)^2 + 32 = 16$
$\Leftrightarrow 2(x - 4)^2 + 16 = 0.$
Un carré est toujours positif, donc
$(x - 4)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(x - 4)^2 + 16 \geqslant 16.$
L'équation n'a pas solution : l'aire des parterres ne sera jamais le quart du jardin.

d) $A(x) = 40.$
Pour les mêmes raisons, on part de la forme canonique :
$A(x) = 40 \Leftrightarrow 2(x - 4)^2 + 32 = 40$
$\Leftrightarrow 2(x - 4)^2 - 8 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 4)^2 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 4 - 2)(x - 4 + 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 6)(x - 2) = 0$
Donc l'aire des parterres vaut $40\,\mathrm{m}^2$ si $x = 6$ ou si $x = 2$.