52 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I. Préciser les extremums de la fonction.

1. $f(x) = 4x - 1$ sur $I = [-2\,;1]$
2. $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $I = [-4\,;-1]$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 1}{x - 2}$ sur $I = [3\,;9]$
4. $j(x) = x^3 - 48x$ sur $I = [-7\,;9]$
5. $k(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$ sur $I = [-8\,;-4]$

A retenir : si on peut éviter de chercher la fonction dérivée et donc d'avoir une étude de signe à faire : on fait le miminum de travail ;-)

1) f est une fonction affine : $f(x) = mx + p$ avec $m = 4$ et $p = 1$

donc f est croissante — m est positif

Ici inutile de dériver = gain de temps

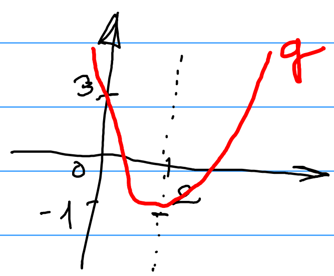
(pour info = $f'(x) = 4$)

2) g est un polynôme du second degré, donc graphiquement, on trouve une parabole

$g(x) = x^2 - 4x + 3$ donc $a = 1$ $b = -4$ $c = 3$

car a > 0

donc on sait que la parabole est "orientée vers le haut"



$g(0) = 3$

abscisse du sommet : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times 1} = 2$

ordonnée du sommet : g(2) = -1

ici aussi, on peut trouver les variations sans utiliser la dérivée = gain de temps

x	$-\infty$	Sommet 2	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
variations de g	↘		↗

Si on veut, on aurait pu trouver l'expression de la dérivée :

$g'(x) = 2ax + b$

$g'(x) = 2x - 4$

puis étudier le signe.

3)

h : pas le choix : il faut dériver !

$h(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 1}{x - 2}$ de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = x^2 - 6x + 1$ $\quad u'(x) = 2x - 6$

$v(x) = x - 2$ $\quad v'(x) = 1$

$h'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ ici $h'(x) = \dfrac{(2x-6)\times(x-2) - (x^2-6x+1)\times 1}{(x-2)^2}$

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6x + 12 - x^2 + 6x - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 11}{(x-2)^2}$$

signe à étudier

$(x-2)^2$ ← toujours positif

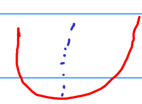
NE PAS developper

* étude du signe du numérateur

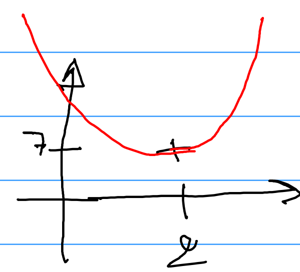
posons $P(x) = x^2 - 4x + 11$ $\quad a = 1 \quad b = -4 \quad c = 11$

Idée 1

on reconnaît un polynôme de degré 2, graphiquement parabole :



$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$



$P(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 11 = 7$

donc pour tout x, $P(x) > 0$

Idée 2 $\quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 11 < 0$ $\quad$ Donc $P(x)$ du signe de a

* signe de h'(x)

$h'(x) = \dfrac{\text{positif}}{\text{positif}} = \text{positif}.$

$$h(x) = \frac{x^2 - 6x + 1}{x - 2}$$

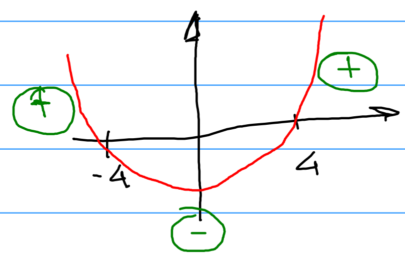
⚠ 2 valeur interdite

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
variations de h		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

4) $j(x) = x^3 - 48x$ pas le choix : dérivée + étude de signe

$$j'(x) = 3x^2 - 48 = 3(\underbrace{x^2 - 16}_{\text{polynôme degré 2}}) = 3\underbrace{(x-4)(x+4)}_{\text{s'annule en 4 et (-4)}}$$

donc



x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $j'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de j		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

c'est prudent de vérfier nos résultats à l'aide d'un grapheur...

5) $k(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$ pas le choix : dérivée + étude de signe

de la forme $k(x) = 2 \times \dfrac{1}{(x+3)^2}$ donc $\lambda \times \dfrac{1}{v}$

d'où $k'(x) = \lambda \times \dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v(x) = (x+3)^2$

idée (1) = développer v

idée (2) = voir v comme u^n

(1) $w(x) = (x+3)^2$

$w(x) = x^2 + 6x + 9$

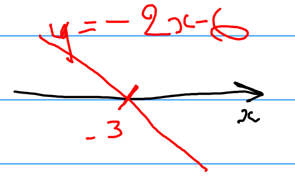
donc $w'(x) = 2x + 6$

(2) dérivée de $u^n \rightarrow n \times u' \times u^{n-1}$

$w'(x) = 2 \times 1 \times (x+3) = 2(x+3)$

donc $k'(x) = 2 \times \frac{-2(x+3)}{\boxed{((x+3)^2)^2}}$ ← signe d'une fct affine : $y = -2x - 6$

toujours positif



x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $k'(x)$		$+$	‖	$-$	
variation de k		↗	‖	↘	

$k(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$

-3 valeur interdite