p 127 n°97

On cherche à montrer que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$$

* On peut commencer par tester sur des exemples

pour $x = 1$

$1^2 + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$ et $2 \geqslant 2$ ok

pour $x = -1$ $(-1)^2 + \frac{1}{(-1)^2} = 2$ et $2 \geqslant 2$ ok

pour $x = 2$ $2^2 + \frac{1}{2^2} = 4 + \frac{1}{4}$ et $4 + \frac{1}{4} \geqslant 2$ ok

pour $x = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + 4$ et $\frac{1}{4} + 4 \geqslant 2$ ok

* confiants, on part sur une réolution d'équation

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \times x^2 \geqslant 2 \times x^2$$

on multiplie par un positif :
l'ordre est conservé

$$\Leftrightarrow x^4 + 1 \geqslant 2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geqslant 0$$

équation de degré 4 : on ne sait pas faire :-(
* idée 1 : il y a une astuce de calcul ?
* idée 2 : on travaille avec des fonctions

L'idée 2 est un classique : au lieu de voir une inéquation, on voit une fonction et on cherche les valeurs de x telle que f(x) soit positif.

Comme l'idée 2 est la méthode que je veux présenter, je commence par elle.

idée 2

posons $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

A) Etude des variations de f

B) Etude du signe de f.

A) Etude des variations de f

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

donc $f'(x) = 4x^3 - 2 \times 2x + 0$

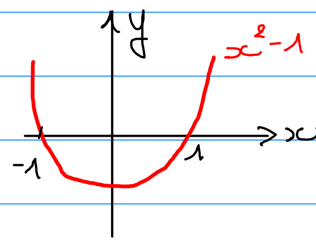
$f'(x) = 4x^3 - 4x$

A.1) étude du signe de la dérivée

$f'(x) = 4x\underbrace{(x^2-1)} = 4x\underbrace{(x-1)(x+1)}$

parabole orientée "vers le haut"

et qui s'annule en 1 et (-1)



A.2) signe de la dérivée et variations

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x^2-1		+	0	−		−	0	+	
signe de x		−		−	0	+		+	
signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
variations de f		↘	0	↗		↘	0	↗	

$f(-1) = (-1)^4 - 2\times(-1)^2 + 1$

$f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$f(1) = 1^4 - 2\times 1 + 1$

$f(1) = 0$

B) signe de f et conclusion

Donc on a toujours f(x) >= 0

$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 + 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$ en "remontant" le calcul du début.

donc l'inégalité est démontrée.

$\boxed{\text{idée 1}}$

On doit résoudre : $x^4 - 2x^2 + 1 \geqslant 0$

Posons $X = x^2$, donc $X^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4$,

l'inéquation s'écrit donc : $X^2 - 2X + 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (X-1)^2 \geqslant 0$ (on a reconnu une identité remarquable)

Or cette égalité est toujours vraie,

donc quelque soit $x \in \mathbb{R}^* : x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$