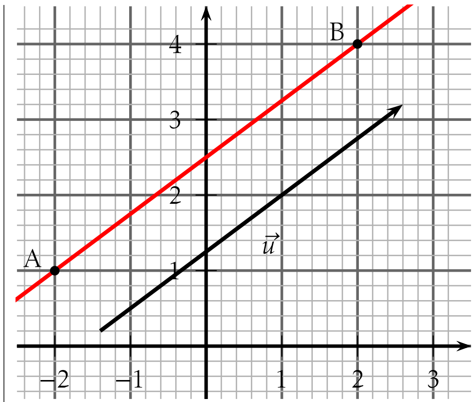
DROITES DU PLAN ET SYSTÈMES

Rappels : Dans un repère

- $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires
  si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times y' - x' \times y = 0$.
- Les points A, M et B sont alignés
  si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

1. Vecteur directeur d'une droite

2. Équation cartésienne d'une droite



Exercices ► ①

① exercices

► *p. 191 n° 1 : équation d'une droite passant par deux points. Aide : exercice corrigé au dessus.*

► *p. 193 n° 5.1 (corrigé dans le livre) : équation d'une droite passant par deux points.*

► *p. 200 n° 41 (corrigé dans le livre) : équation d'une droite passant par deux points.*

3. Équation réduite d'une droite

L'idée : dans certains cas avoir une formule « plus simple » pour l'équation d'une droite.

3.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Dans un repère orthonormé classique, c'est une « droite verticale » ; son équation est de la forme $x = k$.

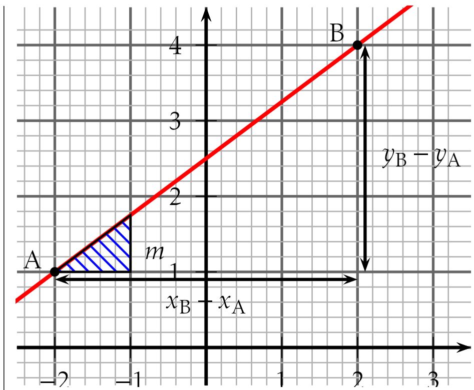
3.2 Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Application de la formule $y = m(x - x_A) + y_A$

avec les points $A(-2\,;1)$ et $B(2\,;4)$:

$$y = \frac{4-1}{2-(-2)}(x-(-2)) + 1 = \frac{3}{4}(x+2)+1$$

donc $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$



Exercices ► ②

② exercices

► *p.204 n° 89 : lire équation réduite*

► *p. 204 n° 94 : équation réduite d'une droite, deux points donnés.*

► *p. 204 n° 95 : équation réduite d'une droite, deux points donnés.*

4. Système de deux équations à deux inconnues

4.1 Définitions

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels fixés avec $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$

Une solution de ce système est un couple $(x;y)$ de nombres réels tel que x et y vérifient simultanément les deux équations.

4.2 Interprétation graphique d'un couple solution

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by-c=0 & (d_1) \\ a'x+b'y-c'=0 & (d_2) \end{cases}$$

Comme $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$, ces deux équations sont des équations cartésiennes de droites.

Dire que ce système admet une solution est équivalent à dire que les droites sont sécantes.

le coefficient directeur de (d_1) est $-\dfrac{a}{b}$; celui de (d_2) est $-\dfrac{a'}{b'}$; ils sont égaux si et seulement si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab'-a'b=0$.

Le système admet une unique solution si et seulement si $ab'-a'b \neq 0$.

4.3 Méthode de résolution d'un système

Exercices ► ③

③ exercices

► p. 195 nº 6 (corrigé dans le livre) : résoudre un système.

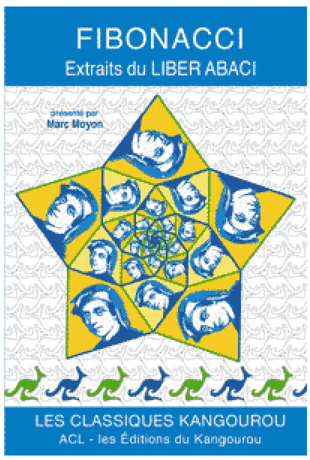
5. Exercices

5.1 Du temps de Fibonacci

Dans son livre *Liber Abaci* (le *livre du calcul*), en 1220, Léonard de Pise, dit Fibonacci, pose divers problèmes et explique comment les résoudre.

Baldassarre Boncompagni traduit le *Liber Abaci* en latin en 1857.

Et plus récemment, Marc Moyon en présente des extraits dans *Les Classiques du Kangourou*.



Voici le problème de la page 325 de la traduction de Baldassarre Boncompagni :

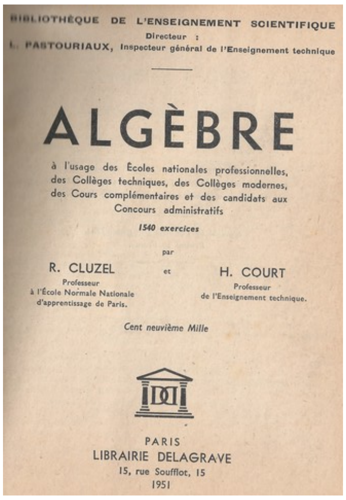
De duobus hominibus habentibus denarios.

Dvo homines habebant denarios; quorum primus querit secundo 7, et proponit se habere quinques tantum quam ipse. Et secundus querit primo 5, et proponit se habere septies tantum quam ipse. Queritur quantitas denariorum uniuscuiusque : pone

Et une traduction possible :

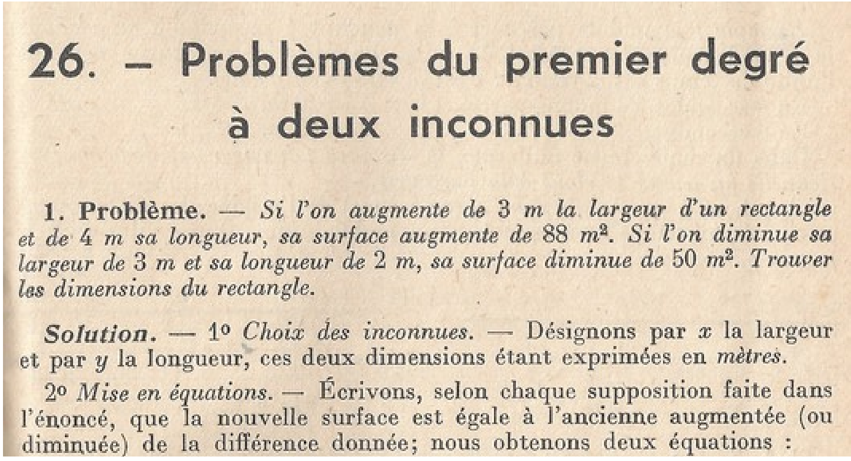
« Deux hommes ont des deniers. Si le premier en demande 7 au deuxième, alors il en aura cinq fois plus que celui-ci. Si le second en demande 5 au premier, alors il en aura sept fois plus que celui-ci. On demande la quantité de deniers de chacun des deux. »

Pour tracer une droite à l'aide de la calculatrice, voir dans le livre les pages « J'étudie une fonction » du livret : pages XI, XIII, et XV.
Dans GeoGebra, il suffit d'écrire l'équation (cartésienne ou réduite) dans la ligne de saisie.



5.2 Du temps de vos grand-parents

Un livre d'exercices d'*Algèbre* de 1951 : par chapitre, quatre ou cinq exercices corrigés comme exemples, puis une série d'exercices.



26. — Problèmes du premier degré à deux inconnues

1. Problème. — *Si l'on augmente de 3 m la largeur d'un rectangle et de 4 m sa longueur, sa surface augmente de 88 m². Si l'on diminue sa largeur de 3 m et sa longueur de 2 m, sa surface diminue de 50 m². Trouver les dimensions du rectangle.*

Solution. — 1° *Choix des inconnues.* — Désignons par x la largeur et par y la longueur, ces deux dimensions étant exprimées en *mètres*.

2° *Mise en équations.* — Écrivons, selon chaque supposition faite dans l'énoncé, que la nouvelle surface est égale à l'ancienne augmentée (ou diminuée) de la différence donnée; nous obtenons deux équations :

5.3 De nos jours

On définit les droites : $d_{-6} : y = -6x - 36$; $d_{-3} : y = -3x - 9$; $d_3 : y = 3x - 9$ et $d_6 : y = 6x - 36$;

1. Déterminer le coefficient directeur de chacune de ces droites. Expliquer pourquoi elles ne sont pas parallèles deux à deux.
2. Calculer les coordonnées des points A, B et C, points d'intersections respectif de d_{-6} et d_6 ; d_{-6} et d_3 ; d_{-6} et d_{-3}.
3. On remarque que les équations de ces droites sont de la forme : $d_a : y = a \times x - a^2$.
   a) L'objectif de cette question est de tracer la *famille* des droites d_a pour toutes les valeurs de a allant de -6 à 6 avec un pas de 0,15 (c'est à dire pour $a = -6$; $a = -5{,}85$; $a = -5{,}7$; ... ; $a = 6$).
   La commande `Séquence` est une boucle *pour* dans GeoGebra.
   En ligne de saisie :
   `Séquence(y = a * x - a^2, a, -6, 6, 0.15)`
   Vous n'avez tracé que des droites : que voyez-vous apparaître ?
   b) Une autre famille de droites :
   `d_a = Séquence(y = -a/sqrt(25-a^2) x + 25/sqrt(25-a^2 ), a, -5, 5, .2)`
   - Donner l'expression des droites d_a en fonction de a.
   - À quel intervalle appartient le paramètre a ?
   - Donner les quatre premières valeurs prises par a. Quel(s) problème(s) va rencontrer GeoGebra ?

1 Soient $A(-5;4)$, $B(2;3)$ et $C(-5;3)$.
Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

2 **1.** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $T(-10;5)$ et dont le vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $F(5;2)$ et $G(25;-2)$.
3. Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

3 Soient $M(-2;5)$, $N(8;0)$ et $P(-3;3)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par P et parallèle à la droite (MN).
2. Le point $R(15;-6)$ est-il sur la droite d ? Justifier.

4 Construire dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ les droites d_1 à d_6 d'équations cartésiennes ou réduites respectives $-3x+4y+9=0$; $x+2y+4=0$ et $2x-5=0$ puis $y=2x-1$; $y=4$ et $x=-2$.

5 On donne deux points $A(-42;20)$ et $B(30;-4)$.
1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
2. Construire la droite (AB) en utilisant son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

6 On considère les droites :
$$d_1: 2x+y+1=0 \text{ et } d_2: 4x+3y-11=0$$
1. Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2, en résolvant par substitution un système que l'on indiquera.

7 On considère les droites :
$$d_1: 3x+4y-19=0 \text{ et } d_2 ; 5x-2y+3=0$$
1. Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2, en résolvant par combinaison linéaire un système que l'on indiquera.

Pour les exercices **41** et **42**, déterminer dans chaque cas une équation cartésienne de la droite (AB).

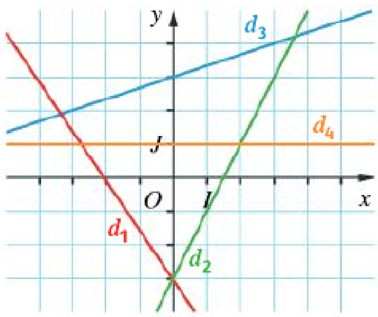
41 **1.** $A(2;1)$ et $B(5;-6)$
2. $A(-3;0)$ et $B(1;1)$

42 **1.** $A(-1;7)$ et $B(0;3)$
2. $A(6;8)$ et $B(3;2)$

43 Soient $A(-3;4)$, $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.
1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AC]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

44 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite d parallèle à la droite (AB) et passant par C.
1. $A(5;4)$; $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$
2. $A(-5;-1)$; $B(6;4)$ et $C(1;2)$

89 Par lecture graphique, préciser le coefficient directeur puis donner une équation réduite de chaque droite.



Dans les exercices **94** et **95** déterminer algébriquement l'équation réduite de la droite (AB).

94 **1.** $A(3;2)$ et $B(5;2)$ **2.** $A(14;3)$ et $B(4;9)$

95 **1.** $A(0{,}2;5)$ et $B(1;0{,}8)$ **2.** $A(3;6)$ et $B(1;6)$

96 Soient $A(3;-2)$, $B(9;2)$ et $C(-2;4)$.
1. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (CM).
3. Le point $D(30;-10)$ appartient-il à la médiane du triangle ABC issue de C ?