Partie cours

Droites du triangle

Médiane

Code couleur GGB : rouge.

Droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G (centre de gravité = point d’équilibre du triangle).

Hauteur

Code couleur GGB : vert.

Droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Médiatrice

Code couleur GGB : bleu.

Droite perpendiculaire à un segment en son milieu.

Partie exercice

Médianes

ABC est un triangle tel que A’ milieu de [BC], B’ milieu de [CA] et C’ milieu de [AB].

Les médianes (AA’) et (BB’) sont sécantes en un point G.

Conjectures :

- le point G appartient aussi à la médiane (CC’).
- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Démontrons que les trois médianes sont concourantes en un point G.

On cherche un point X tel que $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$ d’après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$3\times\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (*)

remarque : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (**) et [AD] est la diagonale du parallélogramme ACDB.

On sait que A’ est le milieu de [AD], alors $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'D}$

On sait que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'D}$ (relation de Chasles).

d’où $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AA'}$

donc (**) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$

et (*) s’écrit $3\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$

$$3\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}-2\overrightarrow{AA'}$$

$$3\overrightarrow{XA}=-2\overrightarrow{AA'}$$

Les vecteurs sont égaux, donc ils ont même direction. Les droites qui les portent sont parallèles.

C'est à dire : les droites (XA) et (AA') sont parallèles.

Or le point A est commun au deux droites : les droites (XA) et (AA') sont confondues ; les points X, A et A' sont alignés.

X appartient à la médiane (AA').

Résumons

On cherche un point X tel que $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$

ce qui revient à dire $3\overrightarrow{XA}=-2\overrightarrow{AA'}$

ce qui signifie X appartient à la médiane (AA').

De même (en utilisant la relation de Chasles avec le point B dans la formule de la page 2) :

on trouve $3\overrightarrow{XB}=-2\overrightarrow{BB'}$

ce qui signifie X appartient à la médiane (BB').

De même (en utilisant la relation de Chasles avec le point C dans la formule de la page 2) :

on trouve $3\overrightarrow{XC}=-2\overrightarrow{CC'}$

ce qui signifie X appartient à la médiane (CC').

Conclusion :

les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G (centre de gravité = point d'équilibre du triangle).

Le point G vérifie : $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

Hauteur

ABC est un triangle.

Les hauteurs (H_A) et (H_B) sont sécantes en un point H.

Conjecture : le point H appartient aussi à la hauteur (H_C).

On cherche un point X tel que $\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$