P 82 n° 79

Pour comparer deux nombres A et B il faut « étudier le signe de leur différence », c'est à dire déterminer si B – A est positif (ou négatif)

a) on veut comparer $\frac{151}{150}$ et $\frac{152}{151}$ sans calculatrice.

On pose $A=\frac{151}{150}$ et $B=\frac{152}{151}$, puis on cherche le signe de : $A-B=\frac{151}{150}-\frac{152}{151}$

$$A-B=\frac{151\times 151}{150\times 151}-\frac{152\times 150}{151\times 150}$$

$$A-B=\frac{151^2-152\times 150}{150\times 151}$$

$$A-B=\frac{151^2-(151+1)\times(151-1)}{150\times 151}$$

Pour calculer 150×152 on utilise l'astuce suivante :

$150\times 152=(151-1)\times(151+1)$.

on reconnaît une identité remarquable :

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ avec $a=151$ et $b=1$

donc $A-B=\frac{151^2-(151^2-1^2)}{150\times 151}=\frac{1}{150\times 151}$

donc $A-B>0 \Leftrightarrow A>B$

c'est à dire $\frac{151}{150}>\frac{152}{151}$

b) on veut comparer $(1+\sqrt{3})^2$ et 4 sans calculatrice.

On pose $A=(1+\sqrt{3})^2$ et $B=4$, puis on cherche le signe de : $A-B=(1+\sqrt{3})^2-4$

Pour A, on reconnaît une identité remarquable :
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ avec $a=1$ et $b=\sqrt{3}$,
donc $A-B=1^2+2\times1\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-4$
or on sait que pour tout réel x positif $(\sqrt{x})^2=x$, donc
$(\sqrt{3})^2=3$
d'où : $A-B=1+2\times\sqrt{3}+3-4=2\sqrt{3}$
donc $A-B>0\Leftrightarrow A>B$
c'est à dire $(1+\sqrt{3})^2>4$

p 97 bilan 5

A est de la forme $\dfrac{x}{x+1}$ avec $x=100\,000\,000\,000$

B est de la forme $\dfrac{y}{y+1}$ avec $y=99\,999\,999\,999$

$$A-B=\frac{x}{x+1}-\frac{y}{y+1}$$

$$A-B=\frac{x\times(y+1)}{(x+1)\times(y+1)}-\frac{y\times(x+1)}{(y+1)\times(x+1)}$$

$$A-B=\frac{xy+x-yx-y}{(x+1)(y+1)}=\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}$$

Quand on cherche le signe d'une expression : on travaille sur la forme factorisée. (ici on ne développe pas le dénominateur).

pour nous : $x=100\,000\,000\,000$ et $y=99\,999\,999\,999$

donc $x - y = 1$,

donc $A - B = \frac{1}{\text{positif} \times \text{positif}} = \text{positif}$

donc $A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$