C03 : L'USINE DU PÈRE NOËL

NOM ....- Mois de naissance ....

sur 22 points

Cahier de cours et d'exercices autorisés.

Dans l'usine du Père Noël, un lutin produit entre 0 et 70 cadeaux par jour. Le coût total de production (en euros) en fonction du nombre x de cadeaux est donné par la fonction :

mois	fonction $C(x)$
1	$0,19x^2 - 9,88x + 148,96$
2	$0,18x^2 - 9,72x + 151,38$
3	$0,17x^2 - 9,52x + 153,0$
4	$0,16x^2 - 9,28x + 153,76$
5	$0,15x^2 - 9,0x + 153,6$
6	$0,14x^2 - 8,68x + 152,46$

mois	fonction $C(x)$
7	$0,13x^2 - 8,32x + 150,28$
8	$0,12x^2 - 7,92x + 147,0$
9	$0,11x^2 - 7,48x + 142,56$
10	$0,1x^2 - 7,0x + 136,9$
11	$0,09x^2 - 6,48x + 129,96$
12	$0,08x^2 - 5,92x + 121,68$

Exercice 1 — Coûts de production *13 points*

Partie A – Calculs et lectures graphiques

1. Calculer le coût de production pour 0 cadeaux. Interpréter ce résultat.
   Il faut calculer $C(0)$. Cela correspond aux frais fixes (aux charges).
2. Calculer le coût de production de 10 cadeaux, puis le calculer le coût unitaire de fabrication de 10 cadeaux.

mois	1	2	3	4	5	6
$C(10)$	69,16	72,18	74,8	76,96	78,6	79,66
$\frac{C(10)}{10}$	6,916	7,218	7,48	7,696	7,86	7,966

mois	7	8	9	10	11	12
$C(10)$	80,08	79,8	78,76	76,9	74,16	70,48
$\frac{C(10)}{10}$	8,008	7,98	7,876	7,69	7,416	7,048

3. Le coût unitaire en fonction du nombre x ($x \geqslant 1$) de cadeaux produits est donné par la fonction :

$$C_u(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Donner l'expression de $C_u(x)$ sous la forme $C_u(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$

1	$0,19x - 9,88 + \frac{148,96}{x}$		7	$0,13x - 8,32 + \frac{150,28}{x}$
2	$0,18x - 9,72 + \frac{151,38}{x}$		8	$0,12x - 7,92 + \frac{147}{x}$
3	$0,17x - 9,52 + \frac{153}{x}$		9	$0,11x - 7,48 + \frac{142,56}{x}$
4	$0,16x - 9,28 + \frac{153,76}{x}$		10	$0,1x - 7,0 + \frac{136,9}{x}$
5	$0,15x - 9,0 + \frac{153,6}{x}$		11	$0,09x - 6,48 + \frac{129,96}{x}$
6	$0,14x - 8,68 + \frac{152,46}{x}$		12	$0,08x - 5,92 + \frac{121,68}{x}$

4. Obtenir la courbe de la fonction C_u à l'aide de la calculatrice (fenêtre graphique : $x \in [1\,;70]$ et $y \in [-0,5\,;5]$) et lire les coordonnées du minimum de la fonction.

On lit :

mois	x_{min}	$C(x_{min})$		mois	x_{min}	$C(x_{min})$
1	28	0,76		7	34	0,52
2	29	0,72		8	35	0,48
3	30	0,68		9	36	0,44
4	31	0,64		10	37	0,4
5	32	0,6		11	38	0,36
6	33	0,56		12	39	0,32

Partie B – Étude de fonction

1. Donner l'expression de la fonction dérivée de C_u.

1	$0,19-\frac{148,96}{x^2}$	7	$0,13-\frac{150,28}{x^2}$
2	$0,18-\frac{151,38}{x^2}$	8	$0,12-\frac{147,0}{x^2}$
3	$0,17-\frac{153,0}{x^2}$	9	$0,11-\frac{142,56}{x^2}$
4	$0,16-\frac{153,76}{x^2}$	10	$0,1-\frac{136,9}{x^2}$
5	$0,15-\frac{153,6}{x^2}$	11	$0,09-\frac{129,96}{x^2}$
6	$0,14-\frac{152,46}{x^2}$	12	$0,08-\frac{121,68}{x^2}$

2. Montrer que la fonction dérivée C_u' peut s'écrire :

mois	$C_u'(x)$
1	$\dfrac{0,19(x+28)(x-28)}{x^2}$
2	$\dfrac{0,18(x+29)(x-29)}{x^2}$
3	$\dfrac{0,17(x+30)(x-30)}{x^2}$
4	$\dfrac{0,16(x+31)(x-31)}{x^2}$
5	$\dfrac{0,15(x+32)(x-32)}{x^2}$
6	$\dfrac{0,14(x+33)(x-33)}{x^2}$

mois	$C_u'(x)$
7	$\dfrac{0,13(x+34)(x-34)}{x^2}$
8	$\dfrac{0,12(x+35)(x-35)}{x^2}$
9	$\dfrac{0,11(x+36)(x-36)}{x^2}$
10	$\dfrac{0,1(x+37)(x-37)}{x^2}$
11	$\dfrac{0,09(x+38)(x-38)}{x^2}$
12	$\dfrac{0,08(x+39)(x-39)}{x^2}$

3. Étudier le signe de la fonction dérivée à l'aide d'un tableau de signes, puis construire le tableau de variations de la fonction C_u sur $[1;70]$.

tableau de signe, sur l'intervalle $[1;70]$, seul le facteur de la forme $(x-a)$ s'annule.

La fonction est décroissante sur $[0;a]$ puis croissante.

4. Déterminer le nombre de cadeaux qui permet de minimiser le coût moyen et donner ce coût. (Les coûts unitaires de production sont très faibles, car le Père Noël exploite les lutins...)

mois	x_{min}	$C(x_{min})$
1	28	0,76
2	29	0,72
3	30	0,68
4	31	0,64
5	32	0,6
6	33	0,56

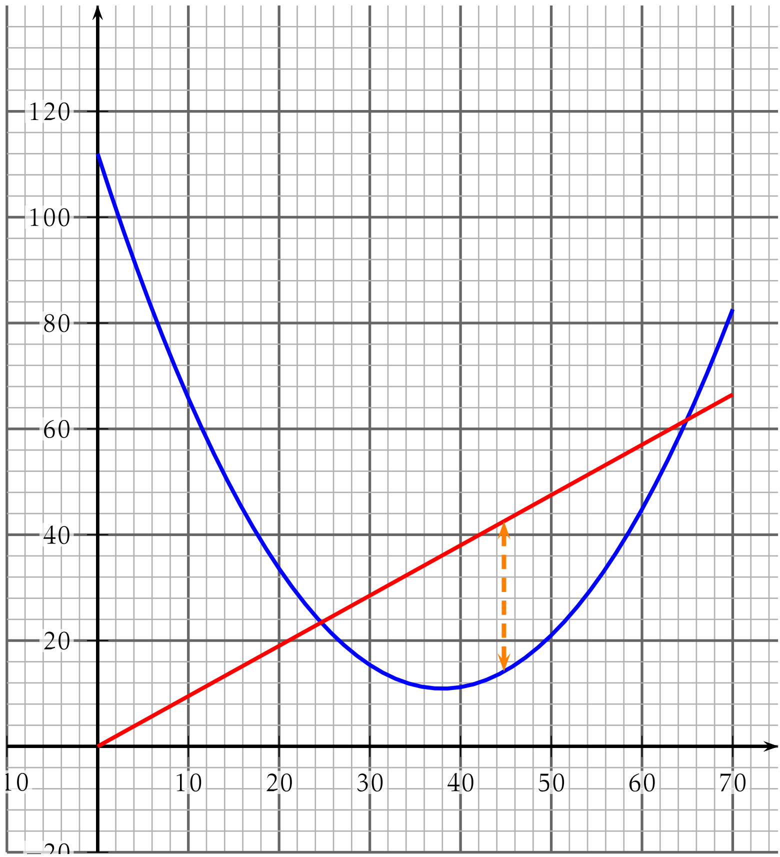
mois	x_{min}	$C(x_{min})$
7	34	0,52
8	35	0,48
9	36	0,44
10	37	0,4
11	38	0,36
12	39	0,32

Exercice 2 — Bénéfice *9 points*

Le Père Noël autorise chaque lutin à vendre les jouets qu'il a fabriqué aux parents. Mais il faut vendre chaque jouet à moins de un euro ! Nofle, le petit lutin, vend donc ses jouets au prix de 0,95 euro.

Le graphique représente les coûts de production en fonction du nombre de jouets fabriqués (rappel : un lutin fabrique entre 1 et 70 jouets par jour.) :

$$C(x) = 0{,}07x^2 - 5{,}32x + 112$$



1. Calculer le coût de fabrication de 50 jouets, en déduire le bénéfice obtenu par cette vente.

coût de fabrication de 50 jouets : $C(50) = 21$, donc 21 euros.
Chaque jouet est vendu 95 centimes, donc bénéfice :
$21 - 0{,}95 \times 50 = 26{,}5$ €.

2. Calculer le coût de fabrication de 20 jouets, en déduire le bénéfice obtenu par cette vente. Interpréter ce résultat.

coût de fabrication de 20 jouets :
$C(20) = 33{,}6$, donc 33,6 euros.
Chaque jouet est vendu 95 centimes, donc bénéfice :
$33{,}6 - 0{,}95 \times 20 = -14{,}6$ €.
c'est donc un déficit : le lutin vend à perte !

3. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction du nombre de jouets vendus. Tracer la représentation de R sur le graphique.

$R(x) = 0{,}95x$. C'est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Il faut calculer au moins une autre valeur pour tracer la droite.

4. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer le bénéfice maximum que peut espérer Nofle.

Le bénéfice est positif quand la droite est « au dessus » de la courbe représentant C ; il est maximal quand l'écart entre les deux courbes est maximal. On lit environ 28 (euros).

5. Vérifier que la fonction B définie sur $[0;70]$ par :

$$B(x) = -0{,}07x^2 + 6{,}27x - 112$$

permet de calculer le bénéfice de Nofle.

$B(x) = R(x) - C(x) = 0{,}95x - (0{,}07x^2 - 5{,}32x + 112)$
$B(x) = -0{,}07x^2 + 0{,}95x + 5{,}32x - 112$
$B(x) = -0{,}07x^2 + 6{,}27x - 112$

6. Expliquer la méthode permettant de trouver le bénéfice maximal par le calcul. (Si vous avez le temps, déterminer par le calcul le nombre de cadeaux à fabriquer - et donc à vendre - pour obtenir le bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.)

Il faut trouver le maximum de la fonction, donc étudier ses variations. Il faut donc trouver la fonction dérivée $B'(x)$, puis étudier le signe de cette fonction dérivée. L'image de la valeur de x qui annulera la dérivée sera la valeur du bénéfice maximal.