C05

NOM .... - Date de naissance ....

2 h et cahiers de cours / exercices autorisés

SUJET A SUJET B

Contrôles de Maths : étude de marché

Une société crée des contrôles à la demande pour des professeurs qui souhaitent avoir des évaluations prêtes à l'emploi.

Une enquête, menée auprès de 108 enseignants de mathématiques, fait apparaître les résultats suivants :

Prix du contrôle (en €) (x_i)	9,5	10,5	15,9	19,1	23,4
Nombre d'enseignants prêts à payer cette somme (y_i)	108	96	85	76	65

Prix du contrôle (en €) (x_i)	39,2	45,1	64,4	73,5	90,0
Nombre d'enseignants prêts à payer cette somme (y_i)	37	30	15	10	6

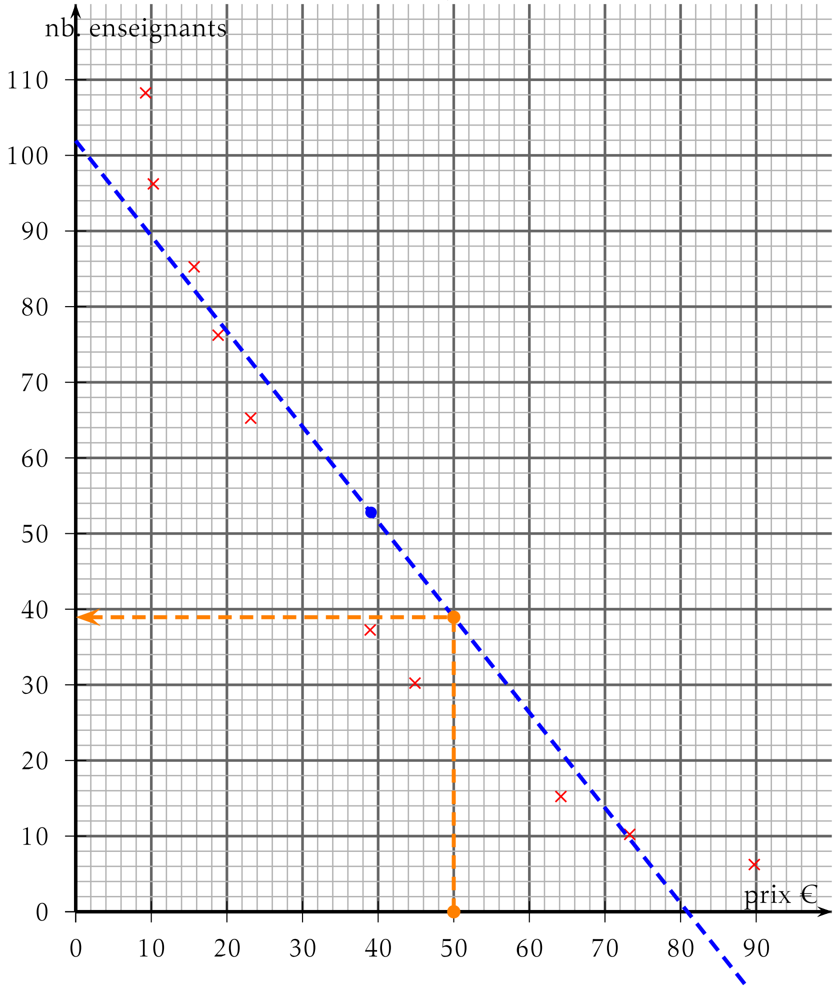
lecture : sur les 108 *enseignants interrogés, tous acceptent de payer* 9,5€, *mais seulement* 76 *d'entre eux acceptent de payer* 19,1 €.

On cherche une corrélation entre le prix du contrôle et le nombre d'enseignants intéressés.

Partie A – Modèle linéaire

7,5 points

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ dans le graphique ci-dessous.



2. Déterminer les coordonnées du point moyen (arrondies au dixième), puis le placer sur le graphique. (39,1 ; 52,8)
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième). Tracer cette droite sur le graphique.

À l'aide de la calculatrice : $y = -1{,}26x + 101{,}94$.
Pour tracer la droite il faut au moins deux points. On sait que le point moyen appartient à la droite de régression par la méthode des moindres carrés.
On obtient un deuxième point pour $x = 0$, on trouve $y = 101{,}94$.

4. Avec ce modèle, déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre d'enseignants qui seraient près à payer $(40 + m)$ € pour avoir un contrôle déjà prêt.

   Par exemple, pour $m = 10$, on lit qu'environ 40 professeurs seraient prêts à payer 50 €.

5. En prenant comme équation de la droite de régression :

$$y = -1{,}3x + 102$$

   retrouver le résultat de la question précédente à l'aide d'un calcul (arrondir à l'entier le plus proche).

mois	approx reglin	arrondi
1	48,7	49
2	47,4	47
3	46,1	46
4	44,8	45
5	43,5	44
6	42,2	42
7	40,9	41
8	39,6	40
9	38,3	38
10	37	37
11	35,7	36
12	34,4	34

6. Expliquer pourquoi ce modèle n'est pas satisfaisant.

   Les points ne semblent pas alignés…

Partie B – Modèle exponentiel *6 points*

Le modèle linéaire n'étant pas satisfaisant, on cherche un modèle exponentiel de la forme :

$$y = a \times b^x$$

avec a et b des réels strictement positifs.

Exemple : pour $x = 90$: on a $6 = a \times b^{90}$. Ce qui est l'expression de l'image de 90 en fonction de a et b.

1. $\boxed{\text{Sujet A}}$

a) Exprimer l'image de 9,5 en fonction de a et b $108 = a \times b^{9,5}$

b) En remarquant que $18 \times 6 = 108$, expliquer pourquoi $18 = b^{-80,5}$

$$\frac{108}{6} = \frac{a \times b^{9,5}}{a \times b^{90}} \Leftrightarrow 18 = \frac{b^{9,5}}{b^{90}} \Leftrightarrow 18 = b^{9,5-90} \Leftrightarrow 18 = b^{-80,5}$$

$\boxed{\text{Sujet B}}$

a) Exprimer l'image de 10,5 en fonction de a et b $96 = a \times b^{10,5}$

b) En remarquant que $16 \times 6 = 96$, expliquer pourquoi $16 = b^{-79,5}$

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur de b arrondie au millième.

- En travaillant par essais/erreurs : $b = 0,965$
- ou bien en résolvant une équation :

  $18 = b^{-80,5}$

  $\Leftrightarrow 18^{\frac{1}{-80,5}} = \left(b^{-80,5}\right)^{\frac{1}{-80,5}}$

  $\Leftrightarrow 0,965 = b$

3. En utilisant l'équation $6 = a \times b^{90}$, remplacer b par la valeur trouvée à la question précédente afin de déterminer une valeur de a arrondie à l'entier. *Si vous n'avez pas répondu à la question précédente, prendre $b = 0,958$.*

$6 = a \times b^{90}$

$\Leftrightarrow 6 = a \times 0,965^{90}$

$\Leftrightarrow 6 = a \times 0,04$

d'où $a = \dfrac{6}{0,04} = 150$

(Avec $b = 0,958$ on trouve $a \approx 300$)

4. À l'aide de ce modèle, déterminer le nombre d'enseignants qui seraient prêts à payer 50 € un contrôle préparé.

Le modèle est $y = 150 \times 0,965^x$, pour $x = 50$ on a $150 \times 0,965^{50} \approx 25$.
25 enseignants seraient prêts à payer 50 € un contrôle déjà préparé.
(avec $b = 0,958$ on trouve environ 35 enseignants).

Partie C – Et pour 1 euro de plus ? *6,5 points*

Dans cette partie, on veut répondre à la question : si le prix du contrôle augmente de 1 euro, quelle la perte (exprimée en pourcentage) de clients ?

Par exemple, quand le coût de l'évaluation passe de 9,5€ *à* 10,5€*, le nombre d'acheteurs potentiels passe de* 108 *à* 96*, soit une perte de* 12 *acheteurs.*

1. Exprimer sous forme de pourcentage (arrondi à l'entier) la baisse de 108 (acheteurs) à 96.

   Une baisse de $t\,\%$ correspond à une multiplication par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$; donc on cherche t tel que :
   $108\times\left(1-\dfrac{t}{100}\right)=96$
   $\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100}=\dfrac{96}{108}$
   $\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100}\approx 0{,}889$
   $\Leftrightarrow -\dfrac{t}{100}=-0{,}111$
   $\Leftrightarrow t\approx 11$
   Cela correspond à une baisse de 11 %

2. Vérifier que lorsque le prix passe de 9,5 € à 73,5€, le nombre d'acheteurs potentiels baisse de 90,7 %.

   on cherche t tel que :
   $108\times\left(1-\dfrac{t}{100}\right)=10$
   $\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100}=\dfrac{10}{108}$
   $\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100}\approx 0{,}093$
   $\Leftrightarrow \dfrac{t}{100}=0{,}907$
   $\Leftrightarrow t\approx 90{,}7$
   Cela correspond à une baisse de 90,7 %

3. Résoudre : $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)^{64}=0{,}093$ (donner une valeur approchée de t arrondie au centième).

$\left(1-\dfrac{t}{100}\right)^{64} = 0{,}093$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100} = 0{,}093^{\frac{1}{64}}$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{t}{100} = 0{,}963\,6$

$\Leftrightarrow -\dfrac{t}{100} = -0{,}036\,4$

$\Leftrightarrow t = 3{,}64$

4. En déduire (en justifiant) le pourcentage de baisse moyen à chaque augmentation de 1€.

D'après ce qui précède, une augmentation de 64 € provoque une baisse de 90,7 % du nombre d'acheteurs potentiels, donc en moyenne, à chaque augmentation de 1 € le nombre d'acheteurs baisse de 3,6 %.