LA FONCTION EXPONENTIELLE

Introduction : pré-requis

Ce cours complète celui du livre (Déclic, page 178 et suivantes) ;
- *médias :* croissance exponentielle *(de la maladie, de l'inflation...)*
- *règles de calculs avec les puissances (entières, entières relatives).*
- *suites géométriques : expression (explicite, par récurrence), représentation graphique, sens de variation.*

formules de dérivation des fonctions usuelles, opérations sur les fonctions dérivées :

Produit : la dérivée de $u(x) \times v(x)$ est . . . .

Quotient : la dérivée de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ est . . . .

Composition par une fonction affine : la dérivée de $f(x) = u(mx+p)$ est

. . . .

1. Une question théorique

1.1 Une équation dont l'inconnue est une fonction

Remarque : si f est une fonction et f' sa fonction dérivée, on remarque que presque toujours : $f'(x) \neq f(x)$.

- $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, a pour dérivée . . . .
- $f(x) = x^2$ a pour dérivée . . . .
- $f(x) = \dfrac{3}{x}$ a pour dérivée . . . .
- $f(x) = (3x+2) \times \sqrt{x}$ a pour dérivée
  . . . .
  . . . .
  . . . .
  . . . .
  . . . .
- $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$ a pour dérivée
  . . . .
  . . . .
  . . . .
  . . . .

Question : existe-t-il une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, autre que . . . .

. . . . qui soit égale à sa dérivée, c'est à dire telle que pour tout réel x on ait $f'(x) = f(x)$?

Dans cette équation l'inconnue est *la fonction* f.

1.2 Calcul d'images

Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit égale à sa dérivée. C'est à dire telle que : $f(x) = f'(x)$ et que $f(0) = 1$ (ce n'est donc pas la fonction nulle !).

L'idée est de calculer une valeur approchée des images.

Par définition : pour tout réel x, $f'(x) =$. . . . .

Ce qui signifie que si « h est très petit » : . . . .

. .

On va simplifier en admettant l'égalité pour h *très petit* :

$f'(x)\boxed{=}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \Leftrightarrow f(x+h) =$. . . . .

Or par hypothèse $f'(x) = f(x)$, donc pour h *très petit*,

. . . .

calculer à la main pour $h = 1$ (pour l'idée) / remarquer la progression / feuille tableur

On remarque que pour h « très petit »,$1 + h > 0$, donc

. . . .

. . . .

.

Bilan

$\boxed{\text{Si}}$ il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : • pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ • $f(0) = 1$	$\boxed{\text{Alors}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $f(x) > 0$, • $f'(x) > 0$, c'est à dire f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ • $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

2. La fonction exponentielle (p. 180)

2.1 Définition

On admet l'existence de cette fonction. Elle se nomme la fonction *exponentielle* et se note exp.

2.2 Propriété

$\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ (donc $\exp(0) \neq 0$).

démonstration : si $g(x) = f(mx + p)$ alors $g'(x) = m \times f'(mx + p)$

2.3 Propriétés algébriques

$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Exercices ▶ ①

① exercices

▶ p 181 nº 2 : *propriétés de calcul*

3. Notation e (p. 182)

Rappels : règles de calcul à l'aides des puissances *entières relatives*.

Certains mathématiciens ont remarqué (comme vous) que :

pour $x \geqslant 0$: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

l'idée leur est venue d'écrire $\sqrt{x}$ comme une puissance : x^p ; on a donc

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x^p)^2 = x^{\boxed{\ldots\ldots}}$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x = x^{\boxed{\ldots\ldots}}$

donc il faut $\boxed{\ldots\ldots} = \boxed{\ldots\ldots}$ c'est à dire $p = \ldots\ldots$

Les puissances non entières sont nées !

Exercices ▶ ②

Culture : Euler / notation e *pour l'exponentielle.* l'Abécédaire des mathématiciens*).*

Attention *: les puissances non entières donnent une écriture qui facilite les calculs, mais elles ne représentent pas un nombre de multiplications !*

$x^4 = \underbrace{x \times x \times x \times x}_{4 \text{ facteurs}}$

$2^{-3} = \left(2^{-1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{3 \text{ facteurs}}$

$3^{\frac{1}{2}} = \underbrace{3 \times ??}_{?? \text{ facteurs}}$

② exercices

▶ p 191 nº 42 : *développer expo*

▶ p 191 nº 43 : *développer expo*

▶ p 191 nº 45 : *développer expo*

4. Étude de la fonction exponentielle (p. 184)

4.1 Signe et sens de variations

- **pour tout** $x \in \mathbb{R}$, exponentielle de x est **strictement positive** : $\mathrm{e}^x > 0$.
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, donc pour comparer des exponentielles il suffit de comparer leur exposant.

Exercices ▶ ③

③ exercices

▶ p 193 nº 68 : *signe de l'expo.*

▶ p 193 nº 69 : *signe de l'expo*

▶ p 194 nº 88 : *équation*

▶ p 194 nº 89 : *équation quotient*

▶ p 194 nº 91 : *équation et changement de variable*

▶ p 196 nº 100 : *comparaison de deux exponentielles*

4.2 Représentation graphique

Exercices ▶ ④

④ exercices

▶ p 197 nº 110 : *dérivée / signe / interprétation graphique.*

la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est l'image par la symétrie d'axe des ordonnées de celle de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

4.3 Dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(ax+b)$

Exercices ▶ ⑤

⑤ exercices

▶ p 193 nº 78 : *étude de fonction*

▶ p 198 nº 117 : *étude de fonction*

5. Aide pour les exercices

p.181 n° 2

1. $\exp(2) = \exp(1+1)\,;\exp(3) = \exp(2+1)$
2. généraliser les exemples.

p.191 n° 42

1. $3\exp(x)^2 * \exp(x) = 3 \times (\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^x$
   $\exp(3x+1)/\exp(x^2) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{x^2}}$
2. les règles de calcul sur les puissances entières sont étendues aux réels.

p.191 n° 43

$A = \mathrm{e}^{2x} + 5\,\mathrm{e}^x$; $B = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x}$; $C = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x$

p.191 n° 45

identités remarquables

p.193 n° 68

signe d'une fonction affine / signe d'une exponentielle

p.193 n° 69

L'exponentielle « de n'importe quel réel » est strictement positive !

Signe d'une fonction affine / du second degré

p.194 n° 88

1. factoriser par e^{-x}
2. (je me répète) l'exponentielle « de n'importe quel réel » est strictement positive !
3. produit nul

p.194 n° 89

il suffit que le numérateur soit nul.

écrire $1 = \mathrm{e}^0$ puis $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$

p.194 n° 91

poser $X = \mathrm{e}^x$, résoudre l'équation du second degré d'inconnue X ; en déduire les valeurs de x.

p.196 n° 100

$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a < b$

p.197 n° 110

1. T a pour équation $y = mx + p$: lecture graphique de m et p
2. a) calculer l'expression de la dérivée ; puis résoudre $f'(x) > 0$.
   b) tableau de variations
   c) interpréter tableau de variations
3. a) faire intervenir la fonction f
   b)

p.197 n° 110

1. développer l'expression et vérifier qu'elle est équivalente à $f'(x)$
2. tracer la fonction et vérifier que les variations correspondent au signe de la dérivée.
3.

p.197 n° 117

1. $f'(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}$
2. tableau de signe (si besoin)
3. équation de la tangente (tracer la fonction et la tangente à l'aide d'un logiciel / calculatrice)
4. utiliser le tableau de variations