SUITES (PARTIE 2)

suites arithmétiques / suites géométriques

Ce document est un complément au cours du livre.

Rappels : notions déjà connues

- générer une suite numérique à l'aide d'une relation explicite (obtenir u_n en fonction du rang n) ou d'une relation par récurrence (obtenir u_{n+1} en fonction de u_n).
- représenter graphiquement une suite numérique (dans un repère : n en abscisse ; u_n en ordonnée).
- démontrer le sens de variation d'une suite
  - signe de $u_{n+1} - u_n$
  - variations de la fonction f si $u_n = f(n)$
- conjecturer le comportement de la suite quand n tend vers $+\infty$ (convergente si les termes tendent vers une valeur finie ; divergente sinon)

1. Suites arithmétiques (p. 146)

1.1 Définitions et propriétés

intro : 100 œufs de Pâques à ramasser / distance entre chaque œuf = 2 mètres, panier = origine, premier œuf à 2 mètres

image mentale de l'escalier

Définitions

définition par récurrence on connaît la valeur de u_0 et on calcule u_{n+1} à partir de u_n : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est une **constante**).

définition explicite $u_n = u_0 + r \times n$. ①

Exercices ▶ ②

① conséquence graphique : les points $(n ; u_n)$ sont la droite d'équation $y = r \times x + u_0$.

② exercices

▶ *p 147 n° 9 : reconnaître expression (corrigé dans le livre p. 406)*

▶ *p 158 n° 59 : expression d'une suite A + calcul des termes*

▶ *p 163 n° 108 : calculer des termes, déterminer la nature d'une suite*

Variations

en fonction du signe de r. Exercices ▶ ③

③ exercices

▶ *p 158 n° 60 : variations d'une suite A*

1.2 Somme des termes consécutifs

somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

somme des n premiers termes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exercices ▶ ④

④ exercices

▶ *p.158 n° 63 : identifier la suite, calculer la somme des termes*

▶ *p.164 n° 115 : étude avec suite auxiliaire*

2. Suites géométriques (p. 148)

2.1 Définitions et propriétés

Définitions

définition par récurrence on connaît la valeur de v_0 et on calcule v_{n+1} à partir de v_n : $v_{n+1} = v_n \times q$ (q est une **constante**).

définition explicite $v_n = v_0 \times q^n$.

Exercices ▶ ⑤

⑤ exercices

▶ *p.149 nº 11 : reconnaître expression (corrigé p. 406)*

▶ *p.164 nº 117 : déterminer raison, premier terme, expression*

Variations

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = q^n$.

- si $q < 0$: la suite (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante ;
- si $q = 0$: la suite (v_n) est nulle à partir du second terme ;
- si $0 < q < 1$: la suite (v_n) est décroissante ;
- si $q = 1$: la suite (v_n) est constante ;
- si $q > 1$: la suite (v_n) est croissante.

Exercices ▶ ⑥

⑥ exercices

▶ *p 158 nº 68 : sens de variations*

2.2 Somme des termes consécutifs

⑦

⑦ *démonstration en classe*

somme des n premières puissances de q (avec $q \neq 0$ et $q \neq 1$) :

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

somme des n premiers termes :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} v_0$$

Exercices ▶ ⑧

⑧ exercices

▶ *longueur de la branche gauche de l'arbre (Python)*

▶ *p 150 nº 14 : modéliser une suite + somme des termes*

▶ *p 165 nº 119 : identifier la suite / somme des termes*

▶ *p 165 nº 120 : identifier la suite / somme des termes (corrigé p. 407*

▶ *p 166 nº 128 : suite arithmético-géométrique*

3. Corrections partielles

p.158 n° 59

1. $u_0 = -1$ et $r = 4$: $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = -1 + 4n$
   $u_5 = -1 + 4 \times 5 = \ldots$
   $u_{10} = -1 + 4 \times 10 = \ldots$
2. $u_{12} = 9$ et $r = \frac{1}{3}$: $u_n = u_0 + nr$ donc $u_{12} = u_0 + 12r \Leftrightarrow 9 = u_0 + 12 \times \frac{1}{3}$.
   donc $u_0 = \ldots$; puis $u_6 = 7$
3. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$: forme explicite, donc $r = \ldots$; puis $u_{2018} = 6\,055$.
4. $u_5 = -12$ et $u_{13} = -44$: image de l'escalier
   - déterminer le signe de r
   - remarquer que de u_5 à u_{13} il y a … marches; donc $u_{13} = u_5 + \cdots \times r$.
   - en déduire la valeur de r.

   $u_{50} = -192$

p.163 n° 108

1. les points semblent être alignés sur une droite croissante
2. donc $(3n+1)(n+5) = 3n^2 + 16n + 5$: on peut simplifier la fraction.
3. on reconnaît la définition …

p.158 n° 60

suite arithmétique : sens de variations en fonction du signe de r.

p.158 n° 63

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$: formule du cours
2. $2 + 4 + 6 + \cdots + 200 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 2 \times 100$
3. $50+51+52+\cdots+100 = 50+(50+1)+(50+2)+\cdots+(50+50) = \cdots \times 50 + 1 + 2 + \cdots + 50$
4. $4 + 7 + 10 + \cdots + 91$: poser $u_n = 4 + 3n$; puis déterminer le rand de 91.
   S = 1 425.

p.164 n° 115

1. a) les termes sont de la forme $\frac{5}{\ldots}$
   b) une suite est arithmétique si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = r$ avec r constante.
   c) calculer les différences des termes consécutifs.
2. a) vérifier que $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n + 5}{5u_n} - \frac{1}{u_n}$ puis simplifier le calcul.
   b) utiliser l'expression explicite de v_n.

p.149 n° 11

1. $u_{n+1} = 5u_n$: on passe d'un terme au suivant en multipliant par 5.
2. $u_n = 5n$: définition explicite d'une suite …
3. $u_n = 5^n$: définition explicite d'une suite …
4. $u_n = 2 + 3^n$: définition explicite d'une suite …
5. $u_n = 2 \times 3^n$: définition explicite d'une suite …
6. $u_{n+1} = 2u_{n-1} + 3$: définition par récurrence d'une suite …

p.158 n° 68

1. définition explicite, $q = 0{,}2$, donc $\ldots < q < \ldots$.
2. définition explicite, $q > 1$, car $q = \ldots$, et vérifier le signe de v_0.
3. définition par récurrence, identifier la valeur de q.
4. remarquer de $t_n = \frac{2}{3} \times (\ldots)^n$.
5. écrire $k_n = \frac{1}{10} \times (-2)^n$.
6. définition par récurrence, déterminer la valeur de q et le signe de z_0.

p.164 n° 117

1. $u_3 = 4$ et $u_{10} = 312\,500$:
   - calculer $\frac{u_{10}}{u_3}$.
   - une puissance 5 a 5 pour chiffre des unités.

   $u_0 = \frac{4}{125}$
2. $u_2 = \frac{5}{9}$ et $u_7 = -\frac{5}{2\,187}$:
   - calculer $\frac{u_7}{u_2}$
   - si la somme des chiffres d'un entier est un multiple de 3, alors cet entier est divisible par 3.

   $u_0 = 5$
3. $u_2 = 2$; $u_6 = 32$ et $q > 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$
4. $u_4 = \frac{15}{8}$; $u_{10} = \frac{15}{512}$ et $q < 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$
   - $2^9 = 512$ et $a^6 = (-a)^6$
   - $u_0 = 30$

p.150 n° 14

1. augmenter de $t\,\%$, c'est multiplier par ...
2. chaque année le nombre d'entrées est multiplié par ...
3. cours : passer de l'expression par récurrence à l'expression explicite
4. u_n représente le nombre d'entrées pour l'année $2\,018+n$; donc pour $2\,025$, n vaut ...
5. vérifier que le nombre de visiteurs en $2\,030$ est donné par u_{12}, puis calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

p.165 n° 119

1. $32 \xrightarrow{\times q} 64 \xrightarrow{\times q} 128$ et $131\,072 = 32 \times q^{12}$.
2. $2 \xrightarrow{\times q} -6 \xrightarrow{\times q} 18 \xrightarrow{\times q} -54$ et $118\,098 = 2 \times \ldots$.
3. $3 \xrightarrow{\times q} 5 \xrightarrow{\times q} \dfrac{25}{3} \xrightarrow{\times q} \dfrac{125}{9}$ (q est un rationnel) et $390\,625 = 5^8$.
4. $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. La somme est une fonction de n. Conjecturer la limite de S_4 quand n tend vers $+\infty$.

p.165 n° 120

1. suites définies de façon explicites : voir définitions du cours.
   $b_n = -3n + 1 = 1 - 3n$
2. sommes des premiers termes : voir formules du cours.
3. remarquer que $u_n = a_n + b_n$.

p.166 n° 128

1. $u_1 = 70$ et $u_2 = 74$
2. arithmétique : $65 \xrightarrow{+\ldots} 70 \xrightarrow{+\ldots} 74$
   géométrique : $65 \xrightarrow{\times\ldots} 70 \xrightarrow{\times,\ldots} 74$
3. a) écrire $v_{n+1} = u_{n+1} - 90$, puis remplacer u_{n+1} par son expression en fonction de n, terminer en factorisant par 0,8.
   b) définition du cours
   c) passer de la définition par récurrence à la définition explicite.
   d) à l'aide de la définition explicite.
4. a) déterminer d'abord le sens de variation de (v_n).
   b) déterminer d'abord la limite de (v_n).