C01

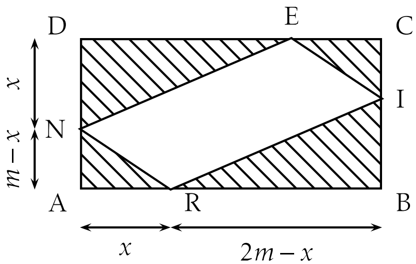
NOM, Prénom ....- Date de naissance ....

À chaque fois que vous voyez la lettre m dans un énoncé, il faut la remplacer par le numéro de votre mois de naissance (pour avril : $m = 4$; pour octobre $m = 10\ldots$).

Exercice 1 — L'aire de RIEN

9 points

ABCD est un rectangle tel que $\mathrm{AB} = m \times 2$ unités de longueur et $\mathrm{BC} = m$ unités de longueur.
Les points R, I, E et N sont respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [BA] tel que $\mathrm{AR} = \mathrm{BI} = \mathrm{CE} = \mathrm{DN} = x$.



L'objectif est de déterminer la (les) valeur(s) de x quand l'aire du quadrilatère RIEN est minimale.

1. Déterminer l'intervalle auquel apparient x.
   $x \in [0\,;m]$
2. Exprimer l'aire du triangle ARN en fonction de x.
   ARN est un triangle rectangle en A, donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{ARN}} = \dfrac{\mathrm{RA} \times \mathrm{NA}}{2} = \dfrac{x \times (m-x)}{2}$
3. En déduire que l'aire de RIEN en fonction de x est donnée par :
   $\mathscr{A}(x) = 2m^2 - 3mx + 2x^2$ (remplacer m par sa valeur avant de continuer !)
   L'aire de RIEN est égale à l'aire de ABCD moins celle des quatre triangles grisés ; donc
   $\mathscr{A}(x) = 2m \times m - (x \times (m-x)) - (2m-x) \times x$
   $\Leftrightarrow \mathscr{A}(x) = 2m^2 - 3mx + 2x^2$.
4. Donner la forme canonique de l'aire de RIEN.
   $\mathscr{A}(x) = 2m^2 - 3mx + 2x^2$
   $$\mathscr{A}(x) = 2\left(x - \frac{3m}{4}\right)^2 + \frac{7m^2}{8}$$

mois	forme canonique
1	$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$
2	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$
3	$2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{63}{8}$
4	$2(x-3)^2+14$
5	$2\left(x-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{175}{8}$

mois	forme canonique
6	$2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{63}{2}$
7	$2\left(x-\frac{21}{4}\right)^2+\frac{343}{8}$
8	$2(x-6)^2+56$
9	$2\left(x-\frac{27}{4}\right)^2+\frac{567}{8}$
10	$2\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{175}{2}$
11	$2\left(x-\frac{33}{4}\right)^2+\frac{847}{8}$
12	$2(x-9)^2+126$

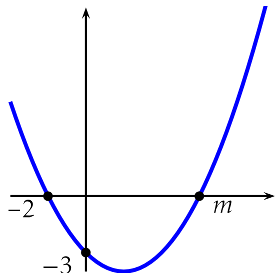
5. Déterminer, la valeur minimale de l'aire de RIEN et la (les) valeur(s) de x qui permet(ent) de l'obtenir.

$\mathscr{A}$ est la somme de deux carrés, elle est donc minimale quand $x-\dfrac{3m}{4}$ est nul, c'est à dire quand $x=\dfrac{3m}{4}$. L'aire minimale vaut $\dfrac{7m^2}{8}$.

Exercice 2 — Recherche parabole

4,5 points

Une parabole est la représentation d'une fonction f du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a réel non nul et b et c réels quelconques.
Le schéma n'est pas à l'échelle. La parabole coupe l'axe des abscisses en (-2) et en m et l'axe des ordonnées en -3.



1. Que représentent les réels (-2) et m pour la fonction f ? Quelle est l'image de 0 par f ?

Ce sont les racines de la fonctions.
Donc $f(x)=a(x-(-2))(x-m)=a(x+2)(x-m)$.
$f(0)=-3$

2. En déduire une expression de f.

$f(0)=a(0+2)(0-m)=-2ma$ et on sait que $f(0)=-3$, donc $a=\dfrac{3}{2m}$.

Donc $f(x)=\dfrac{3}{2m}(x+2)(x-m)$.

Exercice 3 — Recherche rectangle

6,5 points

1. On veut construire un rectangle NORD de périmètre $\mathscr{P} = m \times 40$ unités de longueur et d'aire $\mathscr{A} = m \times 80$ unités d'aire.
   a) Dessiner un schéma représentant cette situation (avec L pour la longueur et ℓ pour la largeur.)
   b) Déterminer une équation dont les solutions sont la longueur L et la largeur ℓ de rectangle.
   c) Expliquer pourquoi il est possible (ou non) de construire le rectangle NORD.

   Soient $\mathrm{L} > 0$ la longueur et $\ell > 0$ la largeur du rectangle. Si le rectangle existe, on doit avoir $\mathscr{P} = 2(\mathrm{L} + \ell) = 40m \Leftrightarrow \mathrm{L} + \ell = 20m$ et $\mathscr{A} = \mathrm{L} \times \ell = 80m$.
   On cherche deux réels connaissant leur somme et leur produit : s'ils existent, ils sont solution de :
   $x^2 - 20mx + 80m = 0$
   $\Delta = (-20m)^2 - 4 \times 1 \times 80m = 400m^2 - 320m$
   pour $m \in [\![1\,;12[\![$ on a toujours $\Delta > 0$, donc L et ℓ existent et le rectangle NORD est constructible.
   (Par définition la somme et le produit sont positifs, donc les solutions sont positives.)

2. Est-il possible de construire un rectangle ROND de périmètre $\mathscr{P} = m \times 2$ unités de longueur et d'aire $\mathscr{A} = m \times 4$ unités d'aire ?

   Soient $\mathrm{L} > 0$ la longueur et $\ell > 0$ la largeur du rectangle. Si le rectangle existe, on doit avoir $\mathscr{P} = 2(\mathrm{L} + \ell) = 2m \Leftrightarrow \mathrm{L} + \ell = m$ et $\mathscr{A} = \mathrm{L} \times \ell = 4m$.
   On cherche deux réels connaissant leur somme et leur produit : s'ils existent, ils sont solution de :
   $x^2 - mx + 4m = 0$
   $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times 4m = m^2 - 16m$
   pour $m \in [\![1\,;12[\![$ on a toujours $\Delta < 0$, donc la construction est impossible.