C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Inéquations

12 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 5x + 7 \geqslant 0$.

   Identification des coefficients.
   Orientation de la parabole en fonction du signe de a.
   $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, donc la fonction ne change pas de signe.

2. On cherche à résoudre l'inéquation : $\dfrac{1}{x} \geqslant 2x - 3$

   a) Sur le graphique, l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est déjà tracée. Tracer (en justifiant) la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

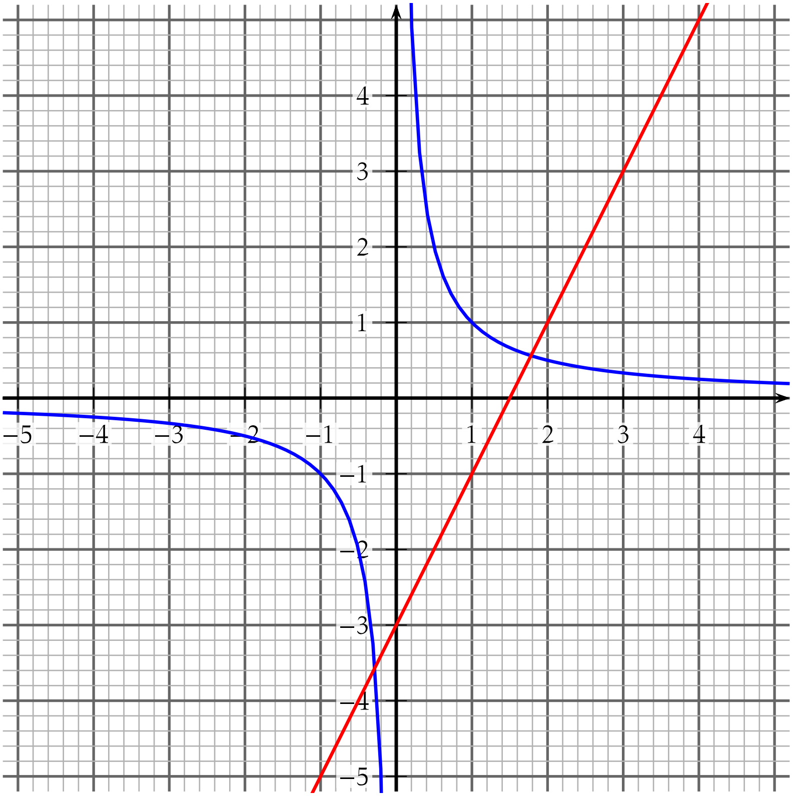
   $$f(x) = 2x - 3.$$

   Lire les solutions de l'inéquation.

   f est une fonction affine, donc sa représentation est une droite. Pour la tracer :
   - Calcul des coordonnées de deux (ou trois) points
   - Ordonnée à l'origine + coefficient directeur

   Les solutions sont les valeurs de x telles que l'hyperbole soit « au-dessus » de la droite.

   b) Retrouver le résultat de la lecture graphique par le calcul et en complétant le tableau de signes qui suit.



x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de x	
signe du quotient	

On cherche $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$ avec $m > 0$.

$\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - (mx + p) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-mx^2 - px + 1}{x} \geqslant 0.$

Or $-mx^2 - px + 1$ est un polynôme du second degré, le coefficient de x^2 est $-m$, qui est négatif (car $m > 0$).

$\Delta = (-p)^2 - 4 \times (-m) \times 1 = p^2 + 4m$, or $m > 0$, donc $\Delta > 0$.

Le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{p - \sqrt{\Delta}}{-2m}$ et $x_2 = \dfrac{p + \sqrt{\Delta}}{-2m}$

On en déduit le tableau de signes (vérifier l'ordre de x_1 et x_2) :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
signe de $-mx^2 - px + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

donc $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left]0\,;x_2\right]$

Exercice 2 — Suites

3 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n+3}{n^2+1}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. En admettant que la suite (u_n) est décroissante, déterminer le rang n à partir du quel $u_n \leqslant 0{,}1$ en expliquant votre méthode.

$u_n = \dfrac{n+a}{n^2+1}$, on cherche n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$

On peut travailler à l'aide de la calculatrice (ce n'est pas trop long, car cet énoncé de contrôle est « trop bien réfléchi » !) ou bien en résolvant une inéquation.

$u_n \leqslant 0{,}1$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+a}{n^2+1} \leqslant 0{,}1$

$\Leftrightarrow n+a \leqslant 0{,}1 \times (n^2+1)$ (car $n^2+1>0$)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}1 \times (n^2+1) - n - a$

Et quelque soit la méthode, on trouve : $n \geqslant 12$.

Exercice 3 — Problème

5 points

Soit la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 &= 5 \\ w_{n+1} &= w_n + 8n - 11 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. À l'aide d'un tableur, un élève a calculé les dix premiers termes de la suite, puis il a placé les points de coordonnées $(n\,;w_n)$ dans un repère et a remarqué qu'ils semblaient décrire une parabole !

Supposons que les points $(n\,;w_n)$ soient sur une parabole d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Exprimer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ en fonction de a, b et c.

b) En déduire un système de deux équations d'inconnues a et b et le résoudre.

$$\begin{cases} c &= f(0) \\ a+b+c &= f(1) \\ 4a+2b+c &= f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = -\dfrac{3}{2}f(0) + 3f(1) - \dfrac{1}{2}f(2) \\ a = \dfrac{1}{2}f(0) - f(1) + \dfrac{1}{2}f(2) \end{cases}$$

c) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Inéquations

12 points

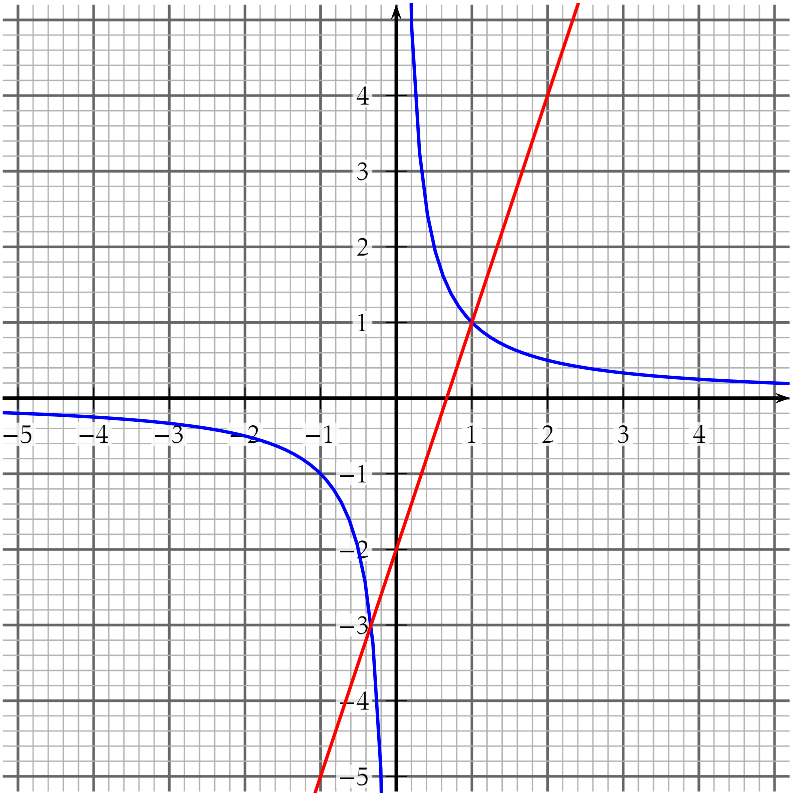
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x^2 - 5x + 7 \leqslant 0$.
   Identification des coefficients.
   Orientation de la parabole en fonction du signe de a.
   $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, donc la fonction ne change pas de signe.

2. On cherche à résoudre l'inéquation : $\dfrac{1}{x} \geqslant 3x - 2$

   a) Sur le graphique, l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est déjà tracée. Tracer (en justifiant) la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = 3x - 2.$$
   Lire les solutions de l'inéquation.
   f est une fonction affine, donc sa représentation est une droite. Pour la tracer :
   - Calcul des coordonnées de deux (ou trois) points
   - Ordonnée à l'origine + coefficient directeur

   Les solutions sont les valeurs de x telles que l'hyperbole soit « au-dessus » de la droite.

   b) Retrouver le résultat de la lecture graphique par le calcul et en complétant le tableau de signes qui suit.



x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de x	
signe du quotient	

On cherche $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$ avec $m > 0$.

$\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - (mx + p) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-mx^2 - px + 1}{x} \geqslant 0.$

Or $-mx^2 - px + 1$ est un polynôme du second degré, le coefficient de x^2 est $-m$, qui est négatif (car $m > 0$).

$\Delta = (-p)^2 - 4 \times (-m) \times 1 = p^2 + 4m$, or $m > 0$, donc $\Delta > 0$.

Le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{p - \sqrt{\Delta}}{-2m}$ et $x_2 = \dfrac{p + \sqrt{\Delta}}{-2m}$

On en déduit le tableau de signes (vérifier l'ordre de x_1 et x_2) :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
signe de $-mx^2 - px + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

donc $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left]0\,;x_2\right]$

Exercice 2 — Suites

3 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. En admettant que la suite (u_n) est décroissante, déterminer le rang n à partir du quel $u_n \leqslant 0{,}15$ en expliquant votre méthode.

$u_n = \dfrac{n+a}{n^2+1}$, on cherche n tel que $u_n \leqslant 0{,}15$

On peut travailler à l'aide de la calculatrice (ce n'est pas trop long, car cet énoncé de contrôle est « trop bien réfléchi » !) ou bien en résolvant une inéquation.

$u_n \leqslant 0{,}15$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+a}{n^2+1} \leqslant 0{,}15$

$\Leftrightarrow n+a \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1)$ (car $n^2+1>0$)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1) - n - a$

Et quelque soit la méthode, on trouve : $n \geqslant 10$.

Exercice 3 — Problème

5 points

Soit la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 &= 5 \\ w_{n+1} &= w_n + 4n - 6 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. À l'aide d'un tableur, un élève a calculé les dix premiers termes de la suite, puis il a placé les points de coordonnées $(n\,;w_n)$ dans un repère et a remarqué qu'ils semblaient décrire une parabole !
   Supposons que les points $(n\,;w_n)$ soient sur une parabole d'équation
   $f(x) = ax^2 + bx + c$
   a) Exprimer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ en fonction de a, b et c.
   b) En déduire un système de deux équations d'inconnues a et b et le résoudre.

$$\begin{cases} c &= f(0) \\ a+b+c &= f(1) \\ 4a+2b+c &= f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = -\dfrac{3}{2}f(0) + 3f(1) - \dfrac{1}{2}f(2) \\ a = \dfrac{1}{2}f(0) - f(1) + \dfrac{1}{2}f(2) \end{cases}$$

   c) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

Co4

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Inéquations

12 points

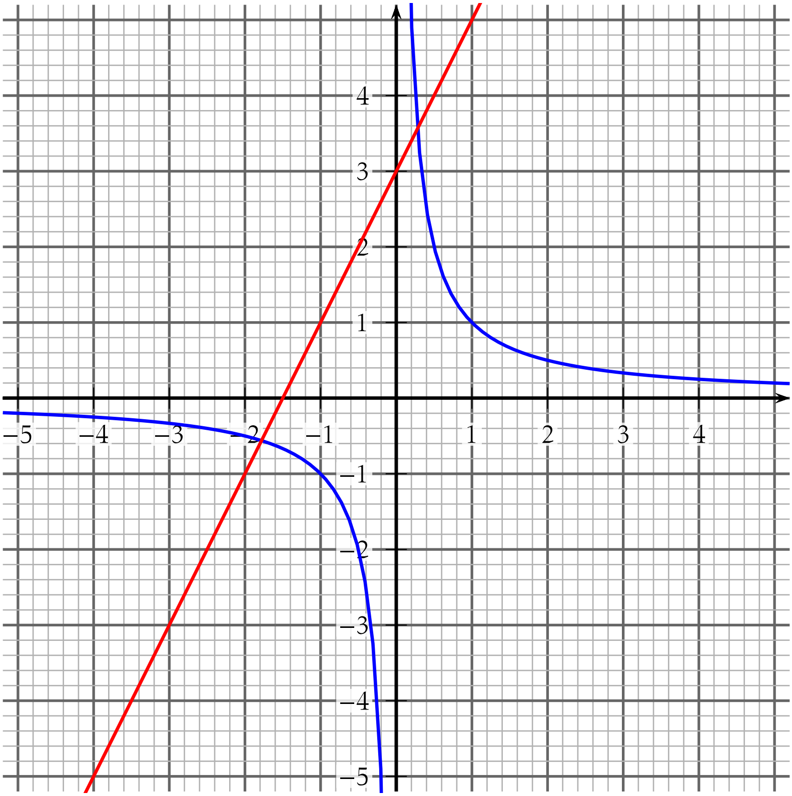
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 5x + 7 \leqslant 0$.
   Identification des coefficients.
   Orientation de la parabole en fonction du signe de a.
   $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, donc la fonction ne change pas de signe.

2. On cherche à résoudre l'inéquation : $\dfrac{1}{x} \geqslant 2x + 3$

   a) Sur le graphique, l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est déjà tracée. Tracer (en justifiant) la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = 2x + 3.$$
   Lire les solutions de l'inéquation.
   f est une fonction affine, donc sa représentation est une droite. Pour la tracer :
   - Calcul des coordonnées de deux (ou trois) points
   - Ordonnée à l'origine + coefficient directeur

   Les solutions sont les valeurs de x telles que l'hyperbole soit « au-dessus » de la droite.

   b) Retrouver le résultat de la lecture graphique par le calcul et en complétant le tableau de signes qui suit.



x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de x	
signe du quotient	

On cherche $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$ avec $m > 0$.

$\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - (mx + p) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-mx^2 - px + 1}{x} \geqslant 0.$

Or $-mx^2 - px + 1$ est un polynôme du second degré, le coefficient de x^2 est $-m$, qui est négatif (car $m > 0$).

$\Delta = (-p)^2 - 4 \times (-m) \times 1 = p^2 + 4m$, or $m > 0$, donc $\Delta > 0$.

Le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{p - \sqrt{\Delta}}{-2m}$ et $x_2 = \dfrac{p + \sqrt{\Delta}}{-2m}$

On en déduit le tableau de signes (vérifier l'ordre de x_1 et x_2) :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
signe de $-mx^2 - px + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

donc $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left]0\,;x_2\right]$

Exercice 2 — Suites

3 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n+4}{n^2+1}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. En admettant que la suite (u_n) est décroissante, déterminer le rang n à partir du quel $u_n \leqslant 0{,}15$ en expliquant votre méthode.

$u_n = \dfrac{n+a}{n^2+1}$, on cherche n tel que $u_n \leqslant 0{,}15$

On peut travailler à l'aide de la calculatrice (ce n'est pas trop long, car cet énoncé de contrôle est « trop bien réfléchi » !) ou bien en résolvant une inéquation.

$u_n \leqslant 0{,}15$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+a}{n^2+1} \leqslant 0{,}15$

$\Leftrightarrow n+a \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1)$ (car $n^2+1>0$)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1) - n - a$

Et quelque soit la méthode, on trouve : $n \geqslant 10$.

Exercice 3 — Problème

5 points

Soit la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 &= 5 \\ w_{n+1} &= w_n + 6n - 4 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. À l'aide d'un tableur, un élève a calculé les dix premiers termes de la suite, puis il a placé les points de coordonnées $(n\,;w_n)$ dans un repère et a remarqué qu'ils semblaient décrire une parabole !
   Supposons que les points $(n\,;w_n)$ soient sur une parabole d'équation
   $f(x) = ax^2 + bx + c$
   a) Exprimer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ en fonction de a, b et c.
   b) En déduire un système de deux équations d'inconnues a et b et le résoudre.

$$\begin{cases} c &= f(0) \\ a+b+c &= f(1) \\ 4a+2b+c &= f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = -\dfrac{3}{2}f(0) + 3f(1) - \dfrac{1}{2}f(2) \\ a = \dfrac{1}{2}f(0) - f(1) + \dfrac{1}{2}f(2) \end{cases}$$

   c) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Inéquations *12 points*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 4x + 7 \geqslant 0$.

Identification des coefficients.
Orientation de la parabole en fonction du signe de a.
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, donc la fonction ne change pas de signe.

2. On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{1}{x} \geqslant 3x + 2$

a) Sur le graphique, l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ est déjà tracée. Tracer (en justifiant) la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 2.$$

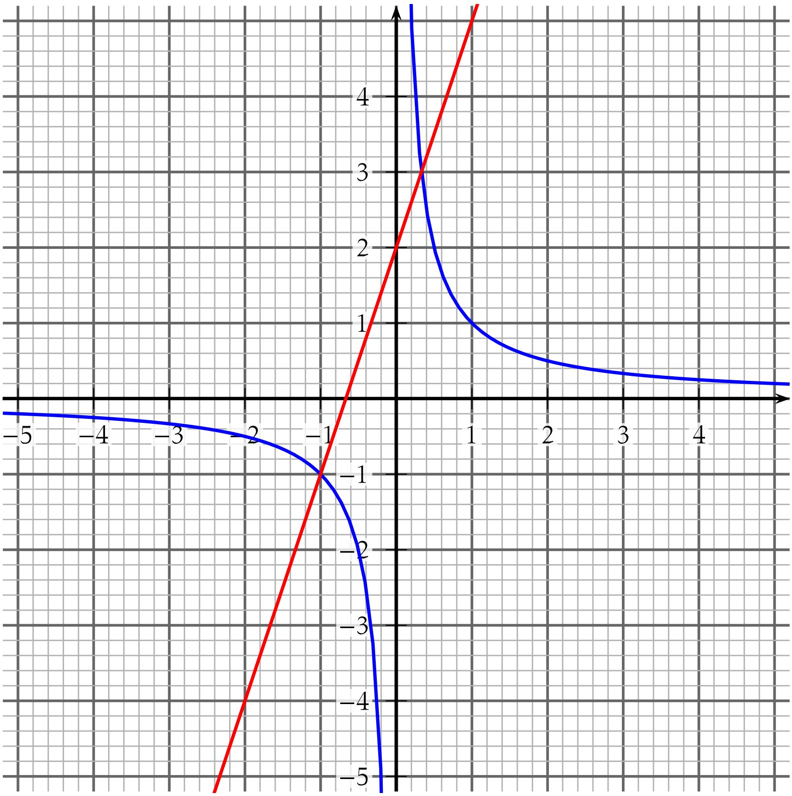
Lire les solutions de l'inéquation.

f est une fonction affine, donc sa représentation est une droite. Pour la tracer :

- Calcul des coordonnées de deux (ou trois) points
- Ordonnée à l'origine + coefficient directeur

Les solutions sont les valeurs de x telles que l'hyperbole soit « au-dessus » de la droite.

b) Retrouver le résultat de la lecture graphique par le calcul et en complétant le tableau de signes qui suit.



x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de x	
signe du quotient	

On cherche $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$ avec $m > 0$.

$\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - (mx + p) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-mx^2 - px + 1}{x} \geqslant 0.$

Or $-mx^2 - px + 1$ est un polynôme du second degré, le coefficient de x^2 est $-m$, qui est négatif (car $m > 0$).

$\Delta = (-p)^2 - 4 \times (-m) \times 1 = p^2 + 4m$, or $m > 0$, donc $\Delta > 0$.

Le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{p - \sqrt{\Delta}}{-2m}$ et $x_2 = \dfrac{p + \sqrt{\Delta}}{-2m}$

On en déduit le tableau de signes (vérifier l'ordre de x_1 et x_2) :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
signe de $-mx^2 - px + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

donc $\dfrac{1}{x} \geqslant mx + p \Leftrightarrow x \in]-\infty ; x_1] \cup]0 ; x_2]$

Exercice 2 — Suites

3 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n+6}{n^2+1}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. En admettant que la suite (u_n) est décroissante, déterminer le rang n à partir du quel $u_n \leqslant 0{,}15$ en expliquant votre méthode.

$u_n = \dfrac{n+a}{n^2+1}$, on cherche n tel que $u_n \leqslant 0{,}15$
On peut travailler à l'aide de la calculatrice (ce n'est pas trop long, car cet énoncé de contrôle est « trop bien réfléchi » !) ou bien en résolvant une inéquation.
$u_n \leqslant 0{,}15$
$\Leftrightarrow \dfrac{n+a}{n^2+1} \leqslant 0{,}15$
$\Leftrightarrow n+a \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1)$ (car $n^2+1>0$)
$\Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}15 \times (n^2+1) - n - a$
Et quelque soit la méthode, on trouve : $n \geqslant 11$.

Exercice 3 — Problème

5 points

Soit la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 &= 5 \\ w_{n+1} &= w_n + 8n - 10 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. À l'aide d'un tableur, un élève a calculé les dix premiers termes de la suite, puis il a placé les points de coordonnées $(n\,;w_n)$ dans un repère et a remarqué qu'ils semblaient décrire une parabole !
   Supposons que les points $(n\,;w_n)$ soient sur une parabole d'équation
   $f(x) = ax^2 + bx + c$
   a) Exprimer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ en fonction de a, b et c.
   b) En déduire un système de deux équations d'inconnues a et b et le résoudre.

$$\begin{cases} c &= f(0) \\ a+b+c &= f(1) \\ 4a+2b+c &= f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = -\dfrac{3}{2}f(0) + 3f(1) - \dfrac{1}{2}f(2) \\ a = \dfrac{1}{2}f(0) - f(1) + \dfrac{1}{2}f(2) \end{cases}$$

   c) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.