C05

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites : sens de variations - limite *10 points*

Pour chacune des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation et la limite quand n tends vers $+\infty$.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

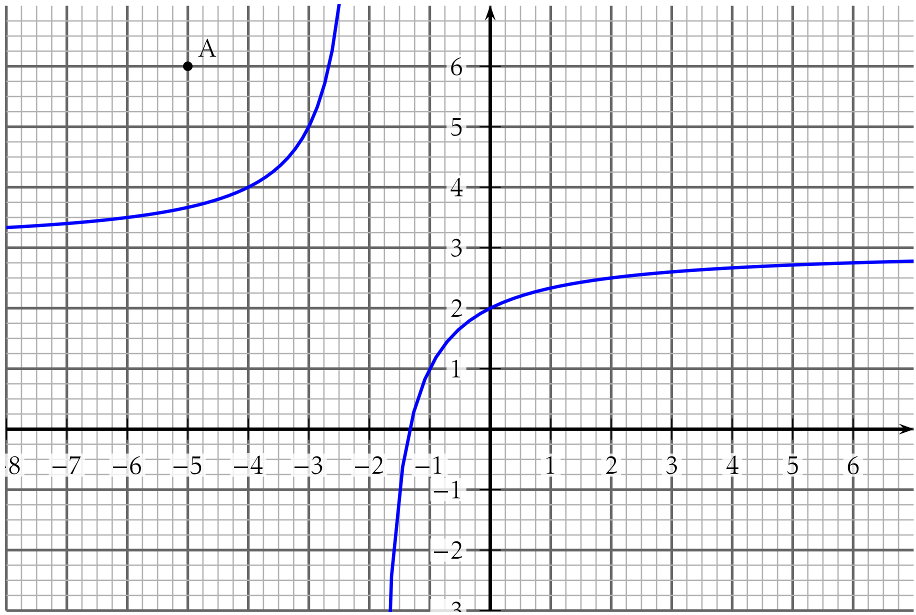
$$u_n = n^3 + 3n - 2 \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{2}{n+3} \end{cases}$$

1. calcul de u_0 ; u_1 et u_2.
2. $u_n = n^3 + an + b$; donc $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + (a+1)$.

   Idée « violente » Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 12(a+1)$; ici $a > 0$, donc $\Delta < 0$. Or le coefficient de n^2 est 3, donc la parabole est orientée « vers le haut » et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3n^2 + 3n + (a+1) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   Idée rapide $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$; $a + 1 \geqslant 0$; donc $3n^2 + 3n + (a+1) \geqslant 0$ (somme de trois termes positifs).
   La suite (u_n) est donc croissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. on connaît v_0. On calcule v_1 et v_2.
2. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{a}{n+b} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{a}{n+b}$;
   comme $a < 0$ et $b > 0$, on obtient, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

4,5 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$.

A est le point de coordonnées $(-5;6)$.

1. Placer sur le graphique le point B de coordonnées $(1;-1)$, puis tracer la droite (AB) : elle coupe $\mathscr{C}_f$ en un point C d'ordonnée supérieure à 3 et en un point D.
2. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
les coordonnées du point A doivent vérifier : $y_A = m x_A + p$
$y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + p$
$\Leftrightarrow p = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
Donc l'équation de la droite (AB) s'écrit :
$y = mx + p$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A$

3. Justifier que (expliquer pourquoi) les abscisses des points C et D sont les solutions d'une équation du second degré (ne pas la résoudre !).

Les points C et D sont les intersections entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (AB)
donc leurs coordonnées vérifient : $\dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A = 0$

Exercice 3 — Équation de droite et suite

5,5 points

Le point A appartient à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Donner les coordonnées de A sachant que son abscisse est $x_A = 3$.
2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.
   a) Démontrer le sens de variation de la suite (x_n).

   $x_{n+1} - x_n = 3 + \dfrac{1}{n+1} - \left(3 + \dfrac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n(n+1)}$
   on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n < 0$;
   donc la suite (x_n) est décroissante.

   b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (x_n).

   On a l'impression que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 3$

3. Soit B_n le point d'abscisse x_n appartenant à la parabole $\mathscr{P}$: ses coordonnées sont donc $\left(x_n\,;\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^2\right)$

a) Donner l'expression de m_n, coefficient directeur de la droite (AB_n), en fonction de n (simplifier le calcul).

Soit m_n le coefficient directeur de la droite (AB_n) :

$$m_n = \frac{y_{\mathrm{B}_n} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}_n} - y_{\mathrm{A}}} \Leftrightarrow \frac{3^2 + \dfrac{2}{n} \times 3 + \dfrac{1}{n^2} - 3^2}{3 + \dfrac{1}{n} - 3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n} \times 3 + \frac{1}{n^2}\right) \times n \Leftrightarrow 2 \times 3 + \frac{1}{n}$$

b) Conjecturer la limite de m_n quand n tends vers $+\infty$.

on conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n = 2 \times 3$.

C05

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites : sens de variations - limite *10 points*

Pour chacune des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation et la limite quand n tends vers $+\infty$.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

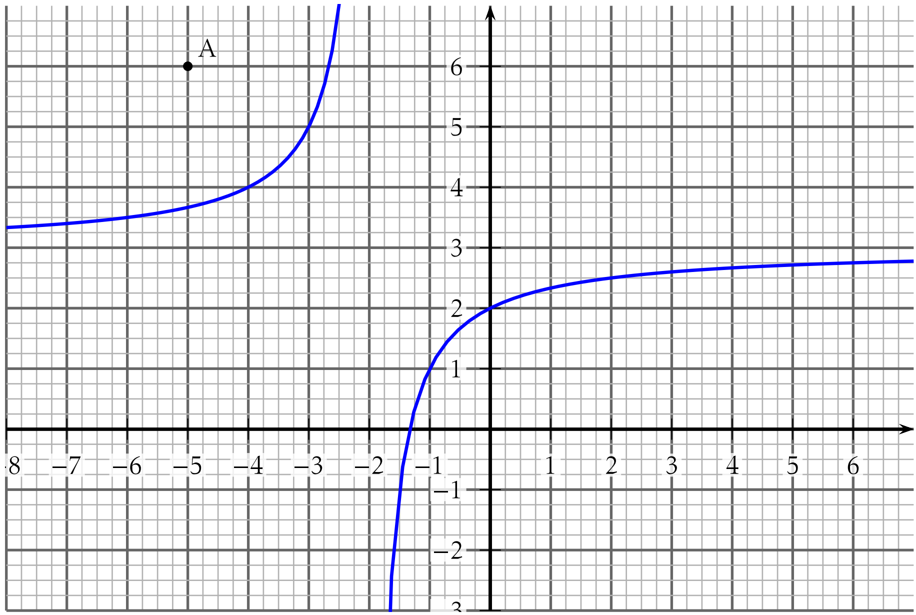
$$u_n = n^3 + 2n - 3 \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{4}{n+5} \end{cases}$$

1. calcul de u_0 ; u_1 et u_2.
2. $u_n = n^3 + an + b$; donc $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + (a+1)$.

   Idée « violente » Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 12(a+1)$; ici $a > 0$, donc $\Delta < 0$. Or le coefficient de n^2 est 3, donc la parabole est orientée « vers le haut » et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3n^2 + 3n + (a+1) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   Idée rapide $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$; $a + 1 \geqslant 0$; donc $3n^2 + 3n + (a+1) \geqslant 0$ (somme de trois termes positifs).
   La suite (u_n) est donc croissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. on connaît v_0. On calcule v_1 et v_2.
2. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{a}{n+b} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{a}{n+b}$;
   comme $a < 0$ et $b > 0$, on obtient, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite *4,5 points*

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty;-2[\ \cup\ ]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$.

A est le point de coordonnées $(-5;6)$.

1. Placer sur le graphique le point B de coordonnées $(2;-1)$, puis tracer la droite (AB) : elle coupe $\mathscr{C}_f$ en un point C d'ordonnée supérieure à 3 et en un point D.
2. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
les coordonnées du point A doivent vérifier : $y_A = mx_A + p$
$y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + p$
$\Leftrightarrow p = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
Donc l'équation de la droite (AB) s'écrit :
$y = mx + p$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$

3. Justifier que (expliquer pourquoi) les abscisses des points C et D sont les solutions d'une équation du second degré (ne pas la résoudre !).

Les points C et D sont les intersections entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (AB) donc leurs coordonnées vérifient : $\dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A = 0$

Exercice 3 — Équation de droite et suite

5,5 points

Le point A appartient à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Donner les coordonnées de A sachant que son abscisse est $x_A = 2$.
2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.
   a) Démontrer le sens de variation de la suite (x_n).

   $x_{n+1} - x_n = 2 + \dfrac{1}{n+1} - \left(2 + \dfrac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n(n+1)}$
   on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n < 0$;
   donc la suite (x_n) est décroissante.

   b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (x_n).

   On a l'impression que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$

3. Soit B_n le point d'abscisse x_n appartenant à la parabole $\mathscr{P}$: ses coordonnées sont donc $\left(x_n\,;\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2\right)$

a) Donner l'expression de m_n, coefficient directeur de la droite (AB_n), en fonction de n (simplifier le calcul).

Soit m_n le coefficient directeur de la droite (AB_n) :

$$m_n = \frac{y_{B_n} - y_A}{x_{B_n} - y_A} \Leftrightarrow \frac{2^2 + \dfrac{2}{n}\times 2 + \dfrac{1}{n^2} - 2^2}{2 + \dfrac{1}{n} - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n}\times 2 + \frac{1}{n^2}\right)\times n \Leftrightarrow 2\times 2 + \frac{1}{n}$$

b) Conjecturer la limite de m_n quand n tends vers $+\infty$.

on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = 2\times 2$.

C05

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites : sens de variations - limite *10 points*

Pour chacune des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation et la limite quand n tends vers $+\infty$.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

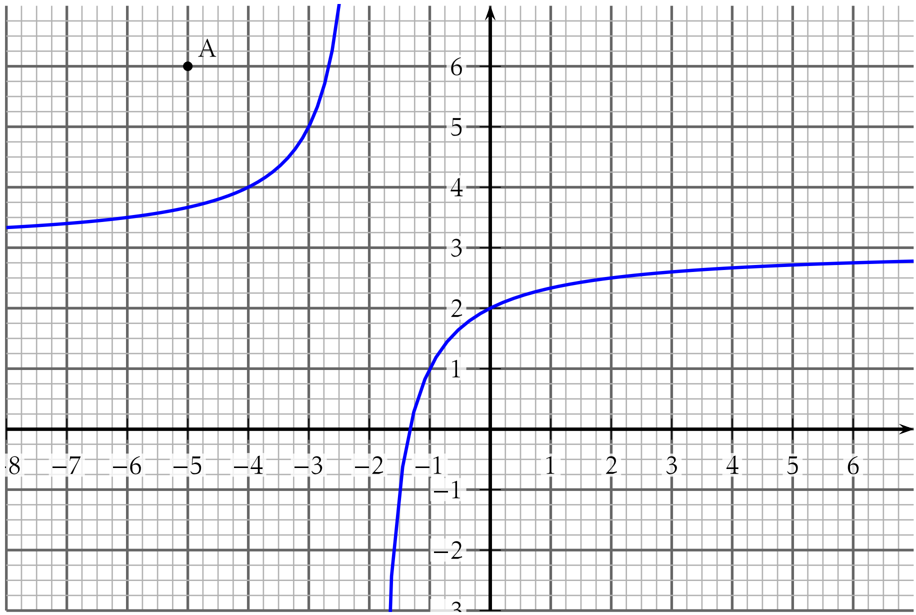
$$u_n = n^3 + 4n - 2 \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{5}{n+3} \end{cases}$$

1. calcul de $u_0\,;u_1$ et u_2.
2. $u_n = n^3 + an + b$; donc $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + (a+1)$.

   Idée « violente » Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 12(a+1)$; ici $a > 0$, donc $\Delta < 0$. Or le coefficient de n^2 est 3, donc la parabole est orientée « vers le haut » et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3n^2 + 3n + (a+1) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   Idée rapide $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$; $a + 1 \geqslant 0$; donc $3n^2 + 3n + (a+1) \geqslant 0$ (somme de trois termes positifs).
   La suite (u_n) est donc croissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. on connaît v_0. On calcule v_1 et v_2.
2. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{a}{n+b} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{a}{n+b}$;
   comme $a < 0$ et $b > 0$, on obtient, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite *4,5 points*

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$.

A est le point de coordonnées $(-5\,;6)$.

1. Placer sur le graphique le point B de coordonnées $(3\,;1)$, puis tracer la droite (AB) : elle coupe $\mathscr{C}_f$ en un point C d'ordonnée supérieure à 3 et en un point D.
2. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
les coordonnées du point A doivent vérifier : $y_A = mx_A + p$
$y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + p$
$\Leftrightarrow p = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
Donc l'équation de la droite (AB) s'écrit :
$y = mx + p$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$

3. Justifier que (expliquer pourquoi) les abscisses des points C et D sont les solutions d'une équation du second degré (ne pas la résoudre !).

Les points C et D sont les intersections entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (AB) donc leurs coordonnées vérifient : $\dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A = 0$

Exercice 3 — Équation de droite et suite

5,5 points

Le point A appartient à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Donner les coordonnées de A sachant que son abscisse est $x_A = 4$.
2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 4 + \dfrac{1}{n}$.
   a) Démontrer le sens de variation de la suite (x_n).

   $x_{n+1} - x_n = 4 + \dfrac{1}{n+1} - \left(4 + \dfrac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n(n+1)}$
   on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n < 0$;
   donc la suite (x_n) est décroissante.

   b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (x_n).

   On a l'impression que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 4$

3. Soit B_n le point d'abscisse x_n appartenant à la parabole $\mathscr{P}$: ses coordonnées sont donc $\left(x_n\,;\left(4+\dfrac{1}{n}\right)^2\right)$

a) Donner l'expression de m_n, coefficient directeur de la droite (AB_n), en fonction de n (simplifier le calcul).

Soit m_n le coefficient directeur de la droite (AB_n) :

$$m_n = \frac{y_{B_n} - y_A}{x_{B_n} - y_A} \Leftrightarrow \frac{4^2 + \dfrac{2}{n} \times 4 + \dfrac{1}{n^2} - 4^2}{4 + \dfrac{1}{n} - 4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n} \times 4 + \frac{1}{n^2}\right) \times n \Leftrightarrow 2 \times 4 + \frac{1}{n}$$

b) Conjecturer la limite de m_n quand n tends vers $+\infty$.

on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = 2 \times 4$.

C05

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites : sens de variations - limite *10 points*

Pour chacune des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation et la limite quand n tends vers $+\infty$.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

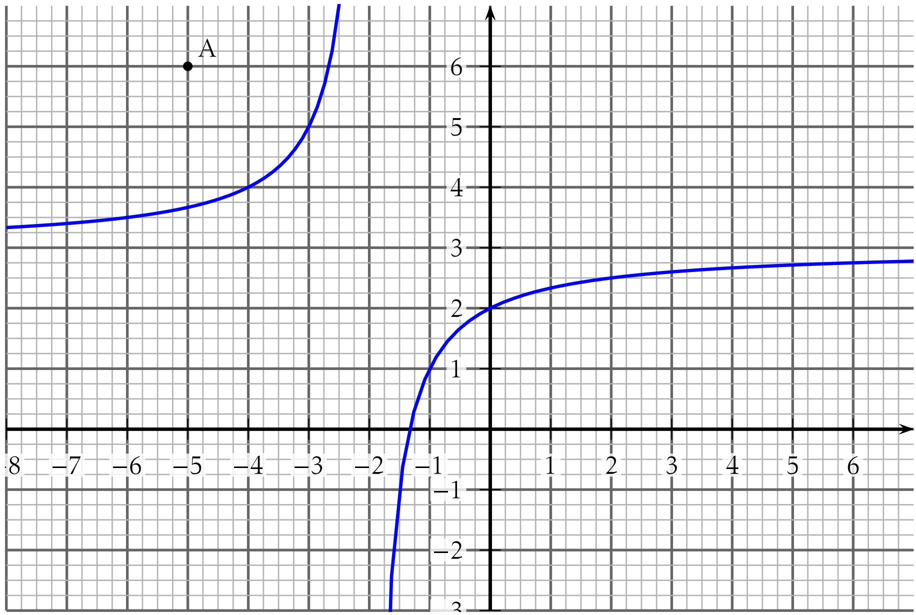
$$u_n = n^3 + 3n - 4 \qquad \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{3}{n+2} \end{cases}$$

1. calcul de u_0 ; u_1 et u_2.
2. $u_n = n^3 + an + b$; donc $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + (a+1)$.

   Idée « violente » Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 12(a+1)$; ici $a > 0$, donc $\Delta < 0$. Or le coefficient de n^2 est 3, donc la parabole est orientée « vers le haut » et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3n^2 + 3n + (a+1) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   Idée rapide $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$; $a + 1 \geqslant 0$; donc $3n^2 + 3n + (a+1) \geqslant 0$ (somme de trois termes positifs).
   La suite (u_n) est donc croissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

1. on connaît v_0. On calcule v_1 et v_2.
2. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{a}{n+b} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{a}{n+b}$;
   comme $a < 0$ et $b > 0$, on obtient, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante.
3. À l'aide de la calculatrice : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

4,5 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$.

A est le point de coordonnées $(-5;6)$.

1. Placer sur le graphique le point B de coordonnées $(4;1)$, puis tracer la droite (AB) : elle coupe $\mathscr{C}_f$ en un point C d'ordonnée supérieure à 3 et en un point D.

2. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
les coordonnées du point A doivent vérifier : $y_A = mx_A + p$
$y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + p$
$\Leftrightarrow p = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
Donc l'équation de la droite (AB) s'écrit :
$y = mx + p$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$

3. Justifier que (expliquer pourquoi) les abscisses des points C et D sont les solutions d'une équation du second degré (ne pas la résoudre !).

Les points C et D sont les intersections entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (AB) donc leurs coordonnées vérifient : $\dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A = 0$

Exercice 3 — Équation de droite et suite

5,5 points

Le point A appartient à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Donner les coordonnées de A sachant que son abscisse est $x_A = 5$.
2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

   a) Démontrer le sens de variation de la suite (x_n).

   $x_{n+1} - x_n = 5 + \dfrac{1}{n+1} - \left(5 + \dfrac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n(n+1)}$
   on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n < 0$;
   donc la suite (x_n) est décroissante.

   b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (x_n).

   On a l'impression que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 5$

3. Soit B_n le point d'abscisse x_n appartenant à la parabole $\mathscr{P}$: ses coordonnées sont donc $\left(x_n\,;\left(5+\dfrac{1}{n}\right)^2\right)$

a) Donner l'expression de m_n, coefficient directeur de la droite (AB_n), en fonction de n (simplifier le calcul).

Soit m_n le coefficient directeur de la droite (AB_n) :

$$m_n = \frac{y_{B_n} - y_A}{x_{B_n} - y_A} \Leftrightarrow \frac{5^2 + \dfrac{2}{n} \times 5 + \dfrac{1}{n^2} - 5^2}{5 + \dfrac{1}{n} - 5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n} \times 5 + \frac{1}{n^2}\right) \times n \Leftrightarrow 2 \times 5 + \frac{1}{n}$$

b) Conjecturer la limite de m_n quand n tends vers $+\infty$.

on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = 2 \times 5$.