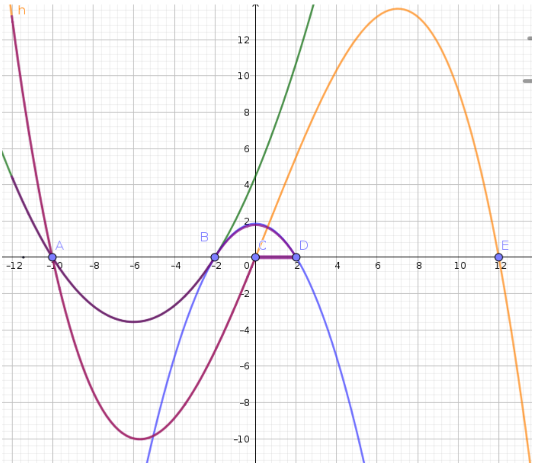
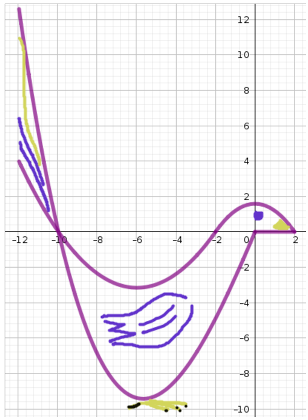
LA POULE DE PÂQUES

Les poules sont composées de deux arcs de paraboles : l'un passant par les points A et B qui forme le dos et une partie de la queue, l'autre entre les points B et D qui forme la tête ; et d'une cubique qui passe par les points A, C et E qui forme le ventre et la partie supérieure de la queue. Le bas du bec est le segment [CD].

Une fois crées, les poules peuvent être décorées !





Partie A – Données

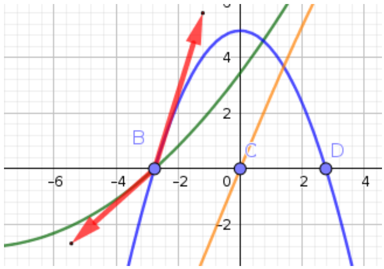
- Les points A, B, C, D et E sont sur l'axe des abscisses.
- le point C a pour coordonnées $(0;0)$ et le point D est le symétrique de B par rapport à C.
- la parabole passant par A et B est la représentation de la fonction :
  $f(x) = \alpha(x - x_A)(x - x_B)$.
- la parabole passant par B et D est la représentation de la fonction :
  $g(x) = \beta(x - x_B)(x - x_D)$.
- la cubique passant par A, C et E est la représentation de la fonction :
  $h(x) = \gamma(x - x_A)(x - x_C)(x - x_E)$

À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C, D et E, puis les curseurs α, β et γ.

Trouver les valeurs de α, β et γ qui permettent de dessiner votre poule et écrire sur votre copie les équations de f et h uniquement.

Partie B – Dos et tête

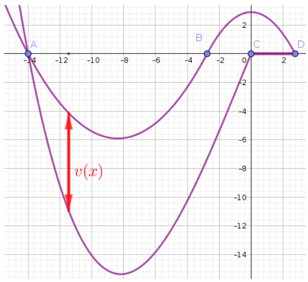
Pour que la poule ait une certaine élégance, il ne faut pas de « cassure » entre le dos et la tête.
L'image montre une cassure : la tangente en B à la courbe de f (arc de parabole vert) n'est pas « alignée » avec la tangente en B à la courbe g (arc de parabole bleu).



1. Déterminer une condition nécessaire pour que les tangentes soient « alignées ».
2. Déterminer la dérivée de f et puis calculer $f'(x_\mathrm{B})$.
3. Déterminer la dérivée de g en fonction de β et donner l'expression de $g'(x_\mathrm{B})$ en fonction de β (ne pas prendre de valeur numérique pour β).
4. En déduire la valeur de β qui permet d'*aligner* les tangentes.
5. Donner l'équation de g. Si cela vous donne une poule que vous jugez peu harmonieuse : recommencer le travail en choisissant une autre valeur pour α ;-)

Partie C – Ventre

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction v qui représente la « hauteur du ventre ».
On définit cette fonction v sur $[x_\mathrm{A}\,;x_\mathrm{B}]$ par $v(x) = f(x) - h(x)$.



1. Déterminer l'expression de la fonction v.
2. À l'aide du signe de la dérivée de v, construire le tableau de variations de v sur $[x_\mathrm{A}\,;x_\mathrm{B}]$.
3. En déduire la hauteur maximale du « ventre de la poule » (arrondir au dixième).