

Exercice 1 — Des trous dans les macaronis

12 points

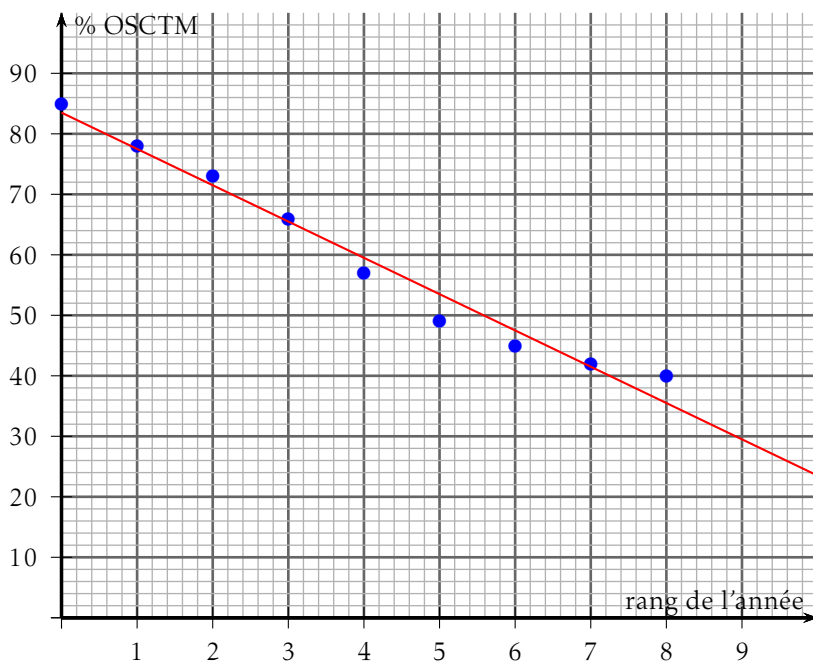
idée : BAC ES, Amérique du Nord, juin 2000

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage du nombre d'ouvriers spécialisés dans la confections de trous dans les macaronis (OSCTM) parmi les ouvriers travaillant dans les usines de pâtes en France de 2010 à 2018.

On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage d'OSCTM.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcent. y_i	85	78	73	66	57	49	45	42	40

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans le repère.



2. a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r^2 de la série statistique $(x_i; y_i)$ (arrondir au millième). Un ajustement affine est-il justifié?

b) Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.

Représenter (D) dans le repère précédent.

$$r^2 = 0,974 \text{ et } y = -6x + 83,5$$

Comme r^2 est proche de 1, l'ajustement affine est justifié.

Pur tracer la droite, donner le calcul d'au moins deux points!

c) En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation du pourcentage d'OSCTM en 2022.

Sujet 1 L'année 2022 correspond à $x = 12$, d'où $y = -6 \times 12 + 85,5 = 11,5$

En 2022, les OSCTM représenteront 11,5% des ouvriers des usines de pâtes.

Sujet 2 L'année 2022 correspond à $x = 12$, d'où $y = -5,2 \times 12 + 62,7 = 0,3$

En 2022, les OSCTM représenteront 0,3% des ouvriers des usines de pâtes.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln(y)$.

a) Compléter le tableau suivant (arrondir au millième).

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	=	4,443	4,357					3,738	3,689
$\ln(y_i)$									

b) Donner une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).

En déduire l'expression de y en fonction de x de la forme $y = A e^B x$ où A et B sont des coefficients à déterminer.

Sujet 1 $z = -0,102x + 4,459$

$$\text{donc } \ln(y) = -0,102x + 4,459$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{-0,102x + 4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,102x} \times e^{4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,102x} \times e^{4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = 86,401 e^{-0,102x}$$

En 2022, (pour $x = 12$), $y = 25,4\%$

Sujet 2 $z = -0,123x + 4,172$

$$\text{donc } \ln(y) = -0,123x + 4,172$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{-0,123x + 4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,123x} \times e^{4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,123x} \times e^{4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = 64,845 e^{-0,123x}$$

En 2022, (pour $x = 12$), $y = 14,8\%$

c) En utilisant ce modèle, donner une estimation du pourcentage de OSCTM en 2022 (arrondir à l'unité)

idée : BAC ES, Pondichéry, avril 2012

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs d'un site internet d'un sympathique professeur de mathématiques au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1. a) Déterminer les coordonnées de G_1 , le point moyen des quatre premiers points du nuage associé à la série $(x_i ; y_i)$; puis celles de G_2 , le point moyen des quatre derniers points.
- b) Donner l'expression réduite de la droite $(G_1 G_2)$ (c'est la droite de Mayer). Arrondir les coefficients au dixième.
- c) En utilisant cet ajustement affine, estimer le nombre de visiteurs (arrondi à l'entier) lors de la douzième semaine suivant la création du site.

	Sujet 1	Sujet 2
G_1	(2,5; 283,25)	(2,5; 271,75)
G_2	(6,5; 437)	(6,5; 455)
$(G_1 G_2)$	$y = 38,4x + 187,2$	$y = 45,8x + 157,2$
$x = 12$	648	707

2. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type *logarithmique*. Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.
- a) Compléter le tableau suivant en donnant les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693	1,386					
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

- b) On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z + 184$.

En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la douzième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).
remplacer x par 12 dans l'équation...

- c) À l'aide de ce nouvel ajustement, résoudre une inéquation permettant de déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 800.

On cherche x tel que : $y \geq 800$

$$\Leftrightarrow a \times z + b \geq 800$$

$$\Leftrightarrow a \times \ln(x) \geq 800 - b$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{800 - b}{a} \quad \text{avec } a > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{\frac{800 - b}{a}} \quad \text{exp fct croissante}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{800 - b}{a}}$$

Sujet 1		Sujet 2
$x = 12$	$y = 515$	$y = 531$
$y \geq 800$	$x \geq 102,6$	$x \geq 76,5$

Exercice 1 — Des trous dans les macaronis

12 points

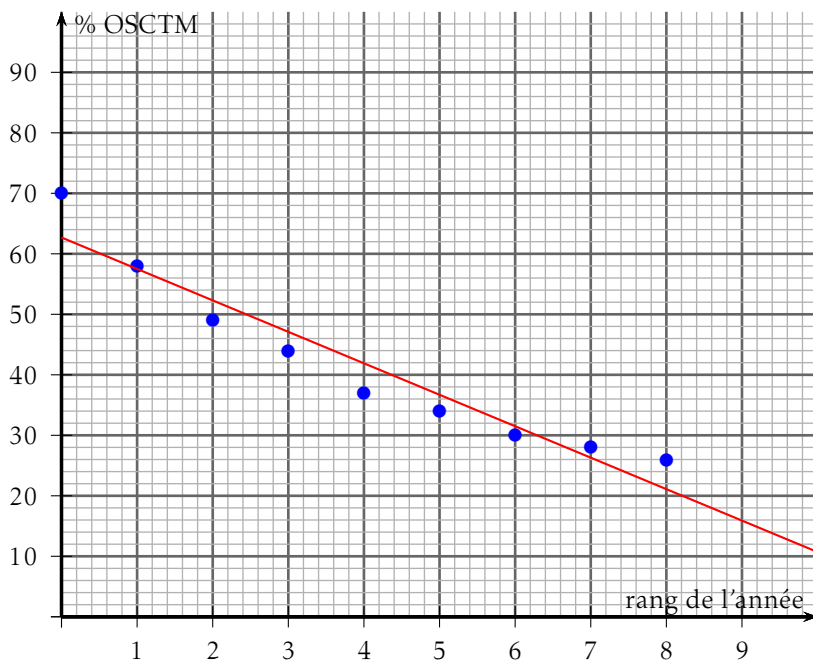
idée : BAC ES, Amérique du Nord, juin 2000

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage du nombre d'ouvriers spécialisés dans la confections de trous dans les macaronis (OSCTM) parmi les ouvriers travaillant dans les usines de pâtes en France de 2010 à 2018.

On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage d'OSCTM.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcent. y_i	55	48	43	44	37	34	32	28	26

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans le repère.



2. a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r^2 de la série statistique $(x_i; y_i)$ (arrondir au millième). Un ajustement affine est-il justifié?

b) Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.

Représenter (D) dans le repère précédent.

$$r^2 = 0,924 \text{ et } y = -5,2x + 62,7$$

Comme r^2 est proche de 1, l'ajustement affine est justifié.

Pur tracer la droite, donner le calcul d'au moins deux points!

c) En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation du pourcentage d'OSCTM en 2022.

Sujet 1 L'année 2022 correspond à $x = 12$, d'où $y = -6 \times 12 + 85,5 = 11,5$

En 2022, les OSCTM représenteront 11,5% des ouvriers des usines de pâtes.

Sujet 2 L'année 2022 correspond à $x = 12$, d'où $y = -5,2 \times 12 + 62,7 = 0,3$

En 2022, les OSCTM représenteront 0,3% des ouvriers des usines de pâtes.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln(y)$.

a) Compléter le tableau suivant (arrondir au millième).

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	=	4,443	4,357					3,738	3,689
$\ln(y_i)$									

b) Donner une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).

En déduire l'expression de y en fonction de x de la forme $y = A e^B x$ où A et B sont des coefficients à déterminer.

Sujet 1 $z = -0,102x + 4,459$

$$\text{donc } \ln(y) = -0,102x + 4,459$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{-0,102x + 4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,102x} \times e^{4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,102x} \times e^{4,459}$$

$$\Leftrightarrow y = 86,401 e^{-0,102x}$$

En 2022, (pour $x = 12$), $y = 25,4\%$

Sujet 2 $z = -0,123x + 4,172$

$$\text{donc } \ln(y) = -0,123x + 4,172$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{-0,123x + 4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,123x} \times e^{4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,123x} \times e^{4,172}$$

$$\Leftrightarrow y = 64,845 e^{-0,123x}$$

En 2022, (pour $x = 12$), $y = 14,8\%$

c) En utilisant ce modèle, donner une estimation du pourcentage de OSCTM en 2022 (arrondir à l'unité)

idée : BAC ES, Pondichéry, avril 2012

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs d'un site internet d'un sympathique professeur de mathématiques au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	200	248	314	325	438	450	460	472

1. a) Déterminer les coordonnées de G_1 , le point moyen des quatre premiers points du nuage associé à la série $(x_i ; y_i)$; puis celles de G_2 , le point moyen des quatre derniers points.
- b) Donner l'expression réduite de la droite $(G_1 G_2)$ (c'est la droite de Mayer). Arrondir les coefficients au dixième.
- c) En utilisant cet ajustement affine, estimer le nombre de visiteurs (arrondi à l'entier) lors de la douzième semaine suivant la création du site.

	Sujet 1	Sujet 2
G_1	(2,5; 283,25)	(2,5; 271,75)
G_2	(6,5; 437)	(6,5; 455)
$(G_1 G_2)$	$y = 38,4x + 187,2$	$y = 45,8x + 157,2$
$x = 12$	648	707

2. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type *logarithmique*. Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

- a) Compléter le tableau suivant en donnant les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693	1,386					
Nombre de visiteurs y_i	200	248	314	325	438	450	460	472

- b) On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 145z + 171$.

En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la douzième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).
remplacer x par 12 dans l'équation...

- c) À l'aide de ce nouvel ajustement, résoudre une inéquation permettant de déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 800.

On cherche x tel que : $y \geq 800$

$$\Leftrightarrow a \times z + b \geq 800$$

$$\Leftrightarrow a \times \ln(x) \geq 800 - b$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{800 - b}{a} \quad \text{avec } a > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{\frac{800 - b}{a}} \quad \text{exp fct croissante}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{800 - b}{a}}$$

Sujet 1		Sujet 2
$x = 12$	$y = 515$	$y = 531$
$y \geq 800$	$x \geq 102,6$	$x \geq 76,5$

