# Co6

NOM, Prénom ........................................................

## Exercice 1 — Intégrale et primitive *7 points*

Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\mathrm{F}(x) = x\ln(x) - x$

**1.** Détailler le calcul de la dérivée de F.

$x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ;

$\mathrm{F}'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

**2.** Calculer la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 3\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 3\ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = 3\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = 3\left(\mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1)\right)$

$\mathrm{I} = 3\left((\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}) - (1 \times \ln(1) - 1)\right)$

$\mathrm{I} = 3$

## Exercice 2 — Intégrale et aire *9 points*

**1.** La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

**a)** Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ et la droite d'équation $x = 1$.

**b)** Expliquer pourquoi le calcul $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ donne l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

la fonction est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;1\right]$

**c)** Calculer, en détaillant, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ (arrondir au centième).

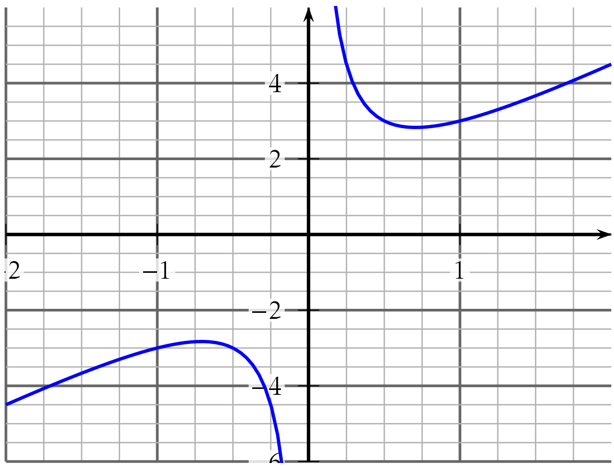
$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{4}\right)$$ avec F une primitive de la fonction $f$.

- $x \mapsto 2x$ a pour primitive $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln(x)$

donc $\mathrm{F}(x) = x^2 + \ln(x)$

**Sujet A** : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{16} - \ln(4) \approx 2{,}32$

**Sujet B** : $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1{,}66$




2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

**a)** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Calculer $h'(x)$.

$h'(x) = \mathrm{e}^x$

**b)** Admettre que pour tout $x$ réel, $h(x)$ est strictement positif. Déterminer une primitive de $g$.

$g$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive est de la forme $\mathrm{G}(x) = \ln(u(x))$.

Donc $\mathrm{G}(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$

**c)** Détailler le calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$

D'après ce qui précède : $I = G(1) - G(-1)$
$= \ln(e+1) - \ln\left(e^{-1}+1\right) = \ln\left(\dfrac{e+1}{e^{-1}+1}\right)$
$= \ln\left(\dfrac{e+1}{\dfrac{1}{e}+1}\right) = \ln\left(\dfrac{e+1}{\dfrac{1+e}{e}}\right) = \ln(e) = 1$

## Exercice 3 — Intégrale et temps d'attente

*4 points*

On peut démontrer (pas aujourd'hui !) que le temps d'attente à la caisse d'un supermarché peut être modélisé par « une loi exponentielle ».

Si T est le temps d'attente, la probabilité $p$ que $T \in [a\,;b]$ (la probabilité que le temps d'attente soit compris entre $a$ unités de temps et $b$ unités de temps) est donnée par :

$p = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ avec $\lambda$ réel strictement positif.

On prend $\lambda = 0{,}02$

**1.** Calculer la probabilité que le temps d'attente T soit compris entre 3 et 7 minutes.

la probabilité que T soit dans $[3\,;7]$ est donnée par $p = \displaystyle\int_3^7 0{,}02\,e^{-0{,}02t}\,dt$
Or la fonction $t \mapsto 0{,}02\,e^{-0{,}02t}$ a pour primitive $t \mapsto -e^{-0{,}02t}$
Donc $p = -e^{-0{,}02\times 7} - \left(-e^{-0{,}02\times 3}\right)$
$p = e^{-0{,}02\times 3} - e^{-0{,}02\times 7}$

**2.** Calculer la probabilité que le temps d'attente T soit inférieur à 5 minutes.

SI T est inférieur à 5, cela signifie qu'il est dans l'intervalle $[0\,;5]$
Donc $p = -e^{-0{,}02\times 5} - \left(-e^{-0{,}02\times 0}\right)$
$p = 1 - e^{-0{,}02\times 5}$

# Co6

NOM, Prénom ..........................................................

## Exercice 1 — Intégrale et primitive *7 points*

Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\mathrm{F}(x) = x\ln(x) - x$

**1.** Détailler le calcul de la dérivée de F.

$x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ;

$\mathrm{F}'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

**2.** Calculer la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 4\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 4\ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = 4\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = 4\,(\mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1))$

$\mathrm{I} = 4\,((\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}) - (1 \times \ln(1) - 1))$

$\mathrm{I} = 4$

## Exercice 2 — Intégrale et aire *9 points*

**1.** La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

**a)** Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$.

**b)** Expliquer pourquoi le calcul $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ donne l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

la fonction est positive sur l'intervalle $\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$

**c)** Calculer, en détaillant, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ (arrondir au centième).

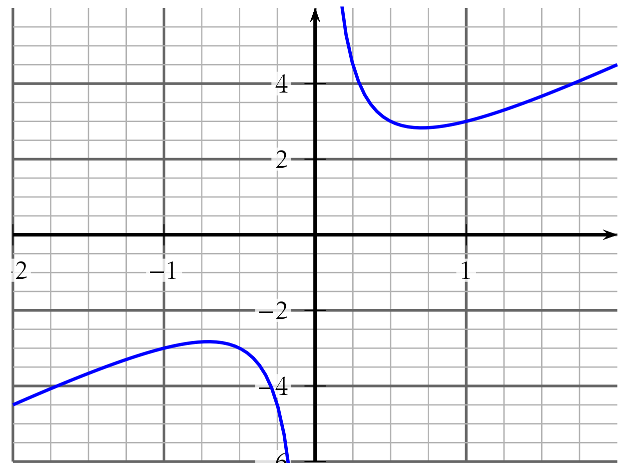
$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(\frac{3}{2}) - \mathrm{F}(1)$ avec F une primitive de la fonction $f$.

- $x \mapsto 2x$ a pour primitive $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln(x)$

donc $\mathrm{F}(x) = x^2 + \ln(x)$

**Sujet A** : $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{16} - \ln(4) \approx 2{,}32$

**Sujet B** : $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1{,}66$




**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

**a)** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Calculer $h'(x)$.

$h'(x) = \mathrm{e}^x$

**b)** Admettre que pour tout $x$ réel, $h(x)$ est strictement positif. Déterminer une primitive de $g$.

$g$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive est de la forme $\mathrm{G}(x) = \ln(u(x))$.

Donc $\mathrm{G}(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

**c)** Détailler le calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$

D'après ce qui précède : $I = G(1) - G(-1)$
$= \ln(e+1) - \ln\left(e^{-1}+1\right) = \ln\left(\dfrac{e+1}{e^{-1}+1}\right)$
$= \ln\left(\dfrac{e+1}{\dfrac{1}{e}+1}\right) = \ln\left(\dfrac{e+1}{\dfrac{1+e}{e}}\right) = \ln(e) = 1$

## Exercice 3 — Intégrale et temps d'attente

*4 points*

On peut démontrer (pas aujourd'hui !) que le temps d'attente à la caisse d'un supermarché peut être modélisé par « une loi exponentielle ».

Si T est le temps d'attente, la probabilité $p$ que $T \in [a\,;b]$ (la probabilité que le temps d'attente soit compris entre $a$ unités de temps et $b$ unités de temps) est donnée par :

$p = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ avec $\lambda$ réel strictement positif.

On prend $\lambda = 0{,}03$

1. Calculer la probabilité que le temps d'attente T soit compris entre 3 et 7 minutes.

   la probabilité que T soit dans $[3\,;7]$ est donnée par $p = \displaystyle\int_3^7 0{,}03\,e^{-0{,}03t}\,dt$
   Or la fonction $t \mapsto 0{,}03\,e^{-0{,}03t}$ a pour primitive $t \mapsto -e^{-0{,}03t}$
   Donc $p = -e^{-0{,}03\times 7} - \left(-e^{-0{,}03\times 3}\right)$
   $p = e^{-0{,}03\times 3} - e^{-0{,}03\times 7}$

2. Calculer la probabilité que le temps d'attente T soit inférieur à 5 minutes.

   SI T est inférieur à 5, cela signifie qu'il est dans l'intervalle $[0\,;5]$
   Donc $p = -e^{-0{,}03\times 5} - \left(-e^{-0{,}03\times 0}\right)$
   $p = 1 - e^{-0{,}03\times 5}$