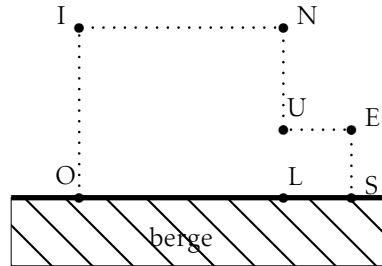


Exercice 1 — Baignade - le retour!

6,5 points

Le nouveau surveillant de baignade dispose d'une corde munie de flotteurs d'une longueur de 81 mètres. Il la fixe à deux endroits sur la berge (nommés O et S) et il délimite ainsi la zone de baignade formée du rectangle LOIN, pour ceux qui veulent nager loin (!) et le carré SEUL avec peu de profondeur pour les enfants (voir schéma).



1. Calculer OI si OL = 20 m et LS = 12 m ; puis en déduire l'aire totale de la zone de baignade.

$$81 = OI + IN + NU + UE + ES$$

$$81 = OI + OL + (OI - ES) + LS + ES$$

$$81 = 2OI + OL + LS$$

$$OI = \frac{81 - 20 - 12}{2},$$

donc l'aire totale est $OL \times OI + LS^2$ et vaut 634 m^2 .

2. Soit $OI = x$ et $LS = 5$. Démontrer que l'aire \mathcal{A} de la zone de baignade en fonction de x est donnée par : $\mathcal{A}(x) = 76x - 2x^2 + 25$.

$$\text{D'après la question précédente : } 81 = 2OI + OL + LS = 2x + OL + 5$$

$$\text{d'où } OL = 81 - 2x - 5$$

$$\mathcal{A}(x) = OI \times OL + LS^2 = 76x - 2x^2 + 25.$$

3. En déduire, en justifiant, la valeur de x qui permet d'obtenir l'aire de baignade maximale.

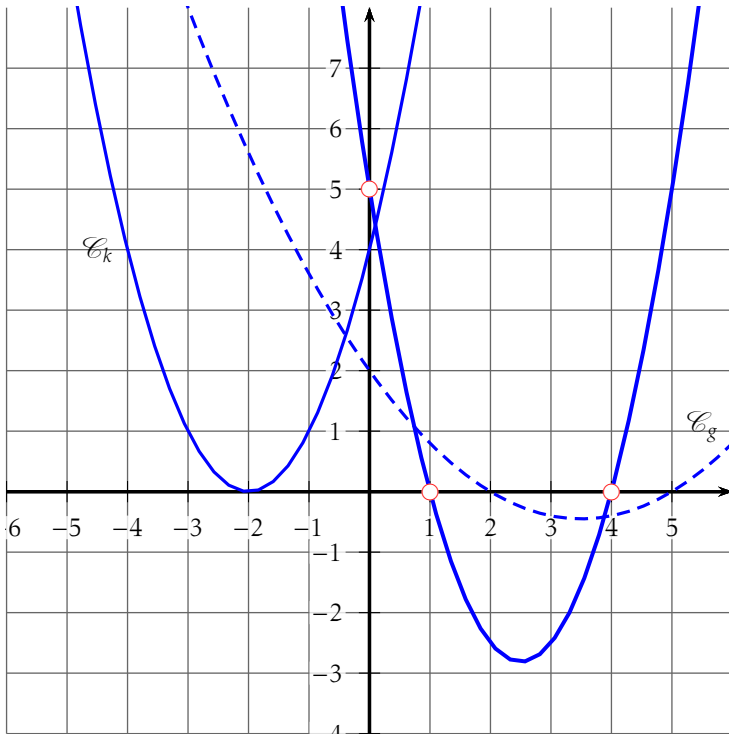
l'aire est une fonction du second degré et le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est orientée « vers le bas » donc le sommet a pour coordonnées

$$(\alpha; f(\alpha)) \text{ avec } \alpha = \frac{81 - 5}{4} = 19.$$

Donc l'aire maximale est 747 m^2

Exercice 2 — Parabole

10 points



1. À l'aide des points à coordonnées entières (représentés par des petits disques), déterminer (en détaillant le raisonnement) l'expression développée de la fonction f dont la courbe représentative est la parabole \mathcal{C}_f .

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(1; 0)$ et $(4; 0)$, donc $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$.

On sait que $f(0) = 5 = 4a$ donc $a = \frac{5}{4}$; donc $f(x) = 1,25(x - 1)(x - 4)$

Donc $f(x) = 1,25x^2 - 5 \times 1,25x + 5$

2. La parabole représentant la fonction k a pour équation : $k(x) = (x + 2)^2$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq k(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat.

Aide : si vous n'avez pas trouvé l'équation de la fonction f , alors résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $g(x) \geq k(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat; sachant que $g(x) = 0,2(x - 2)(x - 5)$.

Pour le plaisir d'avoir le cas général;-)

Les fonctions f sont de la forme : $f(x) = a(x-1)(x-4) = ax^2 - 5ax + 4a$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq k(x) &\Leftrightarrow f(x) - k(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - (x+2)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (4+5a)x + 4(a-1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (4+5a)^2 - 4 \times (a-1) \times 4(a-1) = (4+5a)^2 - (4(a-1))^2 = (4+5a+4a-4)(4+5a-4a+4) = 9a \times (8+a)$$

or $a > 0$, donc $\Delta > 0$ on en déduit que $f(x) \geq k(x) \Leftrightarrow x \in$

$$\left[\frac{5a - 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2}; \frac{5a + 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2} \right]$$

• $a = 0,25 : x \in \left[\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-6,4; 0,7]$

• $a = 0,5 : x \in \left[\frac{-13 - 3\sqrt{17}}{2}; \frac{-13 + 3\sqrt{17}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-12,7; 0,3]$

• $a = 0,75 : x \in \left[\frac{-31 - 3\sqrt{105}}{2}; \frac{-31 + 3\sqrt{105}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-30,9; 0,2]$

• $a = 1,25 : x \in \left[\frac{41 - 3\sqrt{185}}{2}; \frac{41 + 3\sqrt{185}}{2} \right]$ ou bien $x \in [0,1; 41]$

Les paraboles se coupent deux fois!

Exercice 3 — Probabilités

3,5 points

Voici la répartition des 500 paraboles créés lors des travaux sur les « parabolo-phères ».

	orientation	
	vers le haut	vers le bas
négatif sur $[0; 2]$	80	140
positif sur $[0; 2]$	120	160

On choisit une parabole au hasard et on note H l'événement « la parabole est orientée vers le haut » et N l'événement « la fonction est négative sur $[0; 2]$ ».

1. Calculer la probabilité de H, puis celle de N.

$$p(H) = \frac{80 + 120}{500}; p(N) = \frac{80 + 140}{500}$$

2. Calculer la probabilité de l'événement $H \cup N$.

$$p(H \cup N) = \frac{500 - 160}{500}$$

3. Les événements H et N sont-ils indépendants?

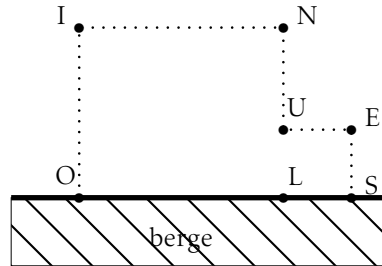
si $p(H) \times p(N) = p(H \cap N)$, alors les événements sont indépendants.

$$p(H \cap N) = \frac{80}{500}$$

Exercice 1 — Baignade - le retour!

6,5 points

Le nouveau surveillant de baignade dispose d'une corde munie de flotteurs d'une longueur de 100 mètres. Il la fixe à deux endroits sur la berge (nommés O et S) et il délimite ainsi la zone de baignade formée du rectangle LOIN, pour ceux qui veulent nager loin (!) et le carré SEUL avec peu de profondeur pour les enfants (voir schéma).



1. Calculer OI si OL = 20 m et LS = 12 m ; puis en déduire l'aire totale de la zone de baignade.

$$\begin{aligned}
 100 &= OI + IN + NU + UE + ES \\
 100 &= OI + OL + (OI - ES) + LS + ES \\
 100 &= 2OI + OL + LS \\
 OI &= \frac{100 - 20 - 12}{2},
 \end{aligned}$$

donc l'aire totale est $OL \times OI + LS^2$ et vaut 824 m^2 .

2. Soit $OI = x$ et $LS = 8$. Démontrer que l'aire \mathcal{A} de la zone de baignade en fonction de x est donnée par : $\mathcal{A}(x) = 92x - 2x^2 + 64$.

D'après la question précédente : $100 = 2OI + OL + LS = 2x + OL + 8$

d'où $OL = 100 - 2x - 8$

$$\mathcal{A}(x) = OI \times OL + LS^2 = 92x - 2x^2 + 64.$$

3. En déduire, en justifiant, la valeur de x qui permet d'obtenir l'aire de baignade maximale.

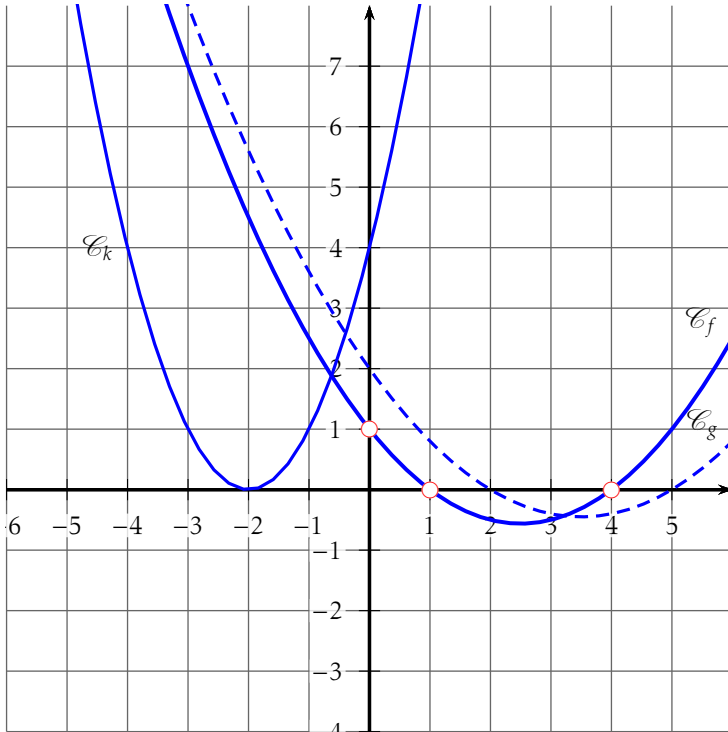
l'aire est une fonction du second degré et le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est orientée « vers le bas » donc le sommet a pour coordonnées

$$(\alpha; f(\alpha)) \text{ avec } \alpha = \frac{100 - 8}{4} = 23.$$

Donc l'aire maximale est $1\,122 \text{ m}^2$

Exercice 2 — Parabole

10 points



1. À l'aide des points à coordonnées entières (représentés par des petits disques), déterminer (en détaillant le raisonnement) l'expression développée de la fonction f dont la courbe représentative est la parabole \mathcal{C}_f .

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(1;0)$ et $(4;0)$, donc $f(x) = a(x-1)(x-4)$.

On sait que $f(0) = 1 = 4a$ donc $a = \frac{1}{4}$; donc $f(x) = 0,25(x-1)(x-4)$

Donc $f(x) = 0,25x^2 - 5 \times 0,25x + 1$

2. La parabole représentant la fonction k a pour équation : $k(x) = (x+2)^2$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq k(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat.

Aide : si vous n'avez pas trouvé l'équation de la fonction f , alors résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $g(x) \geq k(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat; sachant que $g(x) = 0,2(x-2)(x-5)$.

Pour le plaisir d'avoir le cas général;-)

Les fonctions f sont de la forme : $f(x) = a(x-1)(x-4) = ax^2 - 5ax + 4a$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq k(x) &\Leftrightarrow f(x) - k(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - (x+2)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (4+5a)x + 4(a-1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (4+5a)^2 - 4 \times (a-1) \times 4(a-1) = (4+5a)^2 - (4(a-1))^2 = (4+5a+4a-4)(4+5a-4a+4) = 9a \times (8+a)$$

or $a > 0$, donc $\Delta > 0$ on en déduit que $f(x) \geq k(x) \Leftrightarrow x \in$

$$\left[\frac{5a - 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2}; \frac{5a + 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2} \right]$$

- $a = 0,25 : x \in \left[\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-6,4; 0,7]$

- $a = 0,5 : x \in \left[\frac{-13 - 3\sqrt{17}}{2}; \frac{-13 + 3\sqrt{17}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-12,7; 0,3]$

- $a = 0,75 : x \in \left[\frac{-31 - 3\sqrt{105}}{2}; \frac{-31 + 3\sqrt{105}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-30,9; 0,2]$

- $a = 1,25 : x \in \left[\frac{41 - 3\sqrt{185}}{2}; \frac{41 + 3\sqrt{185}}{2} \right]$ ou bien $x \in [0,1; 41]$

Les paraboles se coupent deux fois!

Exercice 3 — Probabilités

3,5 points

Voici la répartition des 500 paraboles créés lors des travaux sur les « parabolophères ».

	orientation	
	vers le haut	vers le bas
négatif sur $[0; 2]$	130	75
positif sur $[0; 2]$	130	165

On choisit une parabole au hasard et on note H l'événement « la parabole est orientée vers le haut » et N l'événement « la fonction est négative sur $[0; 2]$ ».

1. Calculer la probabilité de H, puis celle de N.

$$p(H) = \frac{130 + 130}{500}; p(N) = \frac{130 + 75}{500}$$

2. Calculer la probabilité de l'événement $H \cup N$.

$$p(H \cup N) = \frac{500 - 165}{500}$$

3. Les événements H et N sont-ils indépendants?

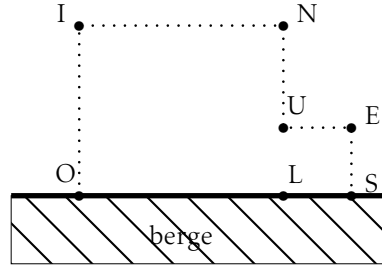
si $p(H) \times p(N) = p(H \cap N)$, alors les événements sont indépendants.

$$p(H \cap N) = \frac{130}{500}$$

Exercice 1 — Baignade - le retour!

6,5 points

Le nouveau surveillant de baignade dispose d'une corde munie de flotteurs d'une longueur de 100 mètres. Il la fixe à deux endroits sur la berge (nommés O et S) et il délimite ainsi la zone de baignade formée du rectangle LOIN, pour ceux qui veulent nager loin (!) et le carré SEUL avec peu de profondeur pour les enfants (voir schéma).



1. Calculer OI si OL = 20 m et LS = 12 m ; puis en déduire l'aire totale de la zone de baignade.

$$\begin{aligned}
 100 &= OI + IN + NU + UE + ES \\
 100 &= OI + OL + (OI - ES) + LS + ES \\
 100 &= 2OI + OL + LS \\
 OI &= \frac{100 - 20 - 12}{2},
 \end{aligned}$$

donc l'aire totale est $OL \times OI + LS^2$ et vaut 824 m^2 .

2. Soit $OI = x$ et $LS = 16$. Démontrer que l'aire \mathcal{A} de la zone de baignade en fonction de x est donnée par : $\mathcal{A}(x) = 84x - 2x^2 + 256$.

D'après la question précédente : $100 = 2OI + OL + LS = 2x + OL + 16$

d'où $OL = 100 - 2x - 16$

$$\mathcal{A}(x) = OI \times OL + LS^2 = 84x - 2x^2 + 256.$$

3. En déduire, en justifiant, la valeur de x qui permet d'obtenir l'aire de baignade maximale.

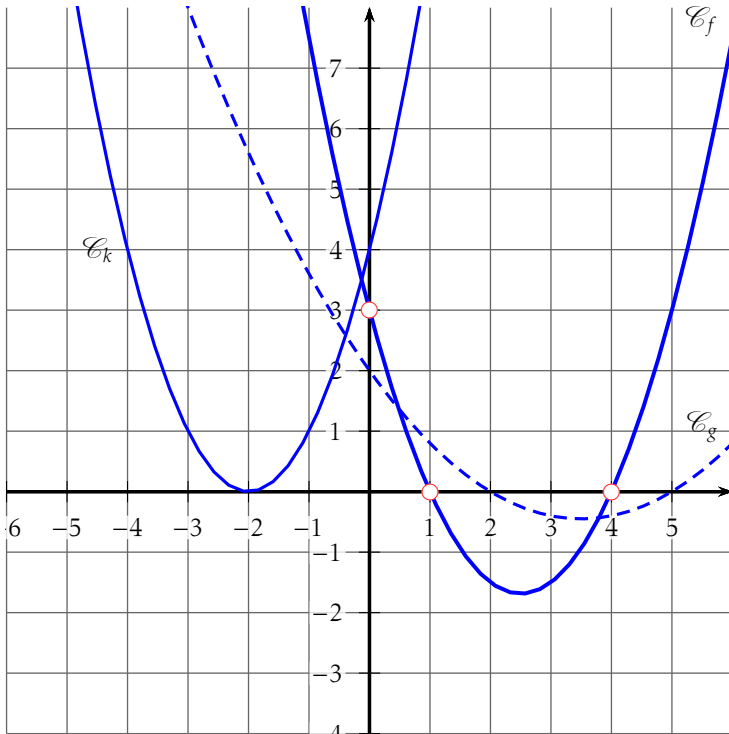
l'aire est une fonction du second degré et le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est orientée « vers le bas » donc le sommet a pour coordonnées

$$(\alpha; f(\alpha)) \text{ avec } \alpha = \frac{100 - 16}{4} = 21.$$

Donc l'aire maximale est $1\,138 \text{ m}^2$

Exercice 2 — Parabole

10 points



1. À l'aide des points à coordonnées entières (représentés par des petits disques), déterminer (en détaillant le raisonnement) l'expression développée de la fonction f dont la courbe représentative est la parabole \mathcal{C}_f .

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(1;0)$ et $(4;0)$, donc $f(x) = a(x-1)(x-4)$.

On sait que $f(0) = 3 = 4a$ donc $a = \frac{3}{4}$; donc $f(x) = 0,75(x-1)(x-4)$

Donc $f(x) = 0,75x^2 - 5 \times 0,75x + 3$

2. La parabole représentant la fonction k a pour équation : $k(x) = (x+2)^2$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq k(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat.

Aide : si vous n'avez pas trouvé l'équation de la fonction f , alors résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $g(x) \geq k(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat; sachant que $g(x) = 0,2(x-2)(x-5)$.

Pour le plaisir d'avoir le cas général;-)

Les fonctions f sont de la forme : $f(x) = a(x-1)(x-4) = ax^2 - 5ax + 4a$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq k(x) &\Leftrightarrow f(x) - k(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - (x+2)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (4+5a)x + 4(a-1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (4+5a)^2 - 4 \times (a-1) \times 4(a-1) = (4+5a)^2 - (4(a-1))^2 = (4+5a+4a-4)(4+5a-4a+4) = 9a \times (8+a)$$

or $a > 0$, donc $\Delta > 0$ on en déduit que $f(x) \geq k(x) \Leftrightarrow x \in$

$$\left[\frac{5a - 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2}; \frac{5a + 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2} \right]$$

• $a = 0,25 : x \in \left[\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-6,4; 0,7]$

• $a = 0,5 : x \in \left[\frac{-13 - 3\sqrt{17}}{2}; \frac{-13 + 3\sqrt{17}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-12,7; 0,3]$

• $a = 0,75 : x \in \left[\frac{-31 - 3\sqrt{105}}{2}; \frac{-31 + 3\sqrt{105}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-30,9; 0,2]$

• $a = 1,25 : x \in \left[\frac{41 - 3\sqrt{185}}{2}; \frac{41 + 3\sqrt{185}}{2} \right]$ ou bien $x \in [0,1; 41]$

Les paraboles se coupent deux fois!

Exercice 3 — Probabilités

3,5 points

Voici la répartition des 500 paraboles créés lors des travaux sur les « parabolo-phères ».

	orientation	
	vers le haut	vers le bas
négatif sur $[0; 2]$	30	120
positif sur $[0; 2]$	70	280

On choisit une parabole au hasard et on note H l'événement « la parabole est orientée vers le haut » et N l'événement « la fonction est négative sur $[0; 2]$ ».

1. Calculer la probabilité de H, puis celle de N.

$$p(H) = \frac{30+70}{500}; p(N) = \frac{30+120}{500}$$

2. Calculer la probabilité de l'événement $H \cup N$.

$$p(H \cup N) = \frac{500 - 280}{500}$$

3. Les événements H et N sont-ils indépendants?

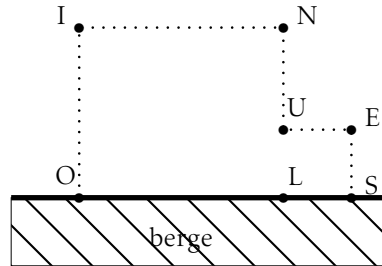
si $p(H) \times p(N) = p(H \cap N)$, alors les événements sont indépendants.

$$p(H \cap N) = \frac{30}{500}$$

Exercice 1 — Baignade - le retour!

6,5 points

Le nouveau surveillant de baignade dispose d'une corde munie de flotteurs d'une longueur de 81 mètres. Il la fixe à deux endroits sur la berge (nommés O et S) et il délimite ainsi la zone de baignade formée du rectangle LOIN, pour ceux qui veulent nager loin (!) et le carré SEUL avec peu de profondeur pour les enfants (voir schéma).



1. Calculer OI si OL = 20 m et LS = 12 m ; puis en déduire l'aire totale de la zone de baignade.

$$81 = OI + IN + NU + UE + ES$$

$$81 = OI + OL + (OI - ES) + LS + ES$$

$$81 = 2OI + OL + LS$$

$$OI = \frac{81 - 20 - 12}{2},$$

donc l'aire totale est $OL \times OI + LS^2$ et vaut 634 m^2 .

2. Soit $OI = x$ et $LS = 13$. Démontrer que l'aire \mathcal{A} de la zone de baignade en fonction de x est donnée par : $\mathcal{A}(x) = 68x - 2x^2 + 169$.

$$\text{D'après la question précédente : } 81 = 2OI + OL + LS = 2x + OL + 13$$

$$\text{d'où } OL = 81 - 2x - 13$$

$$\mathcal{A}(x) = OI \times OL + LS^2 = 68x - 2x^2 + 169.$$

3. En déduire, en justifiant, la valeur de x qui permet d'obtenir l'aire de baignade maximale.

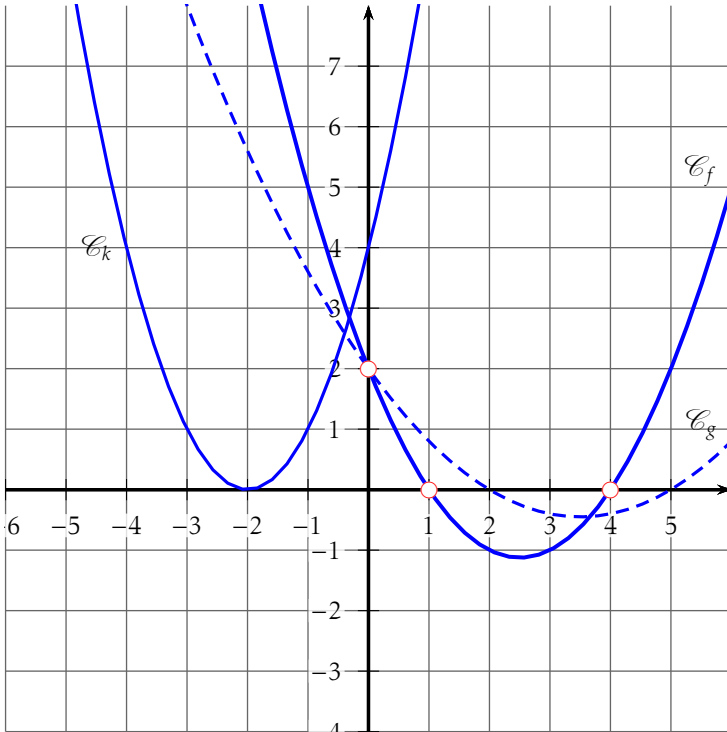
l'aire est une fonction du second degré et le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est orientée « vers le bas » donc le sommet a pour coordonnées

$$(\alpha; f(\alpha)) \text{ avec } \alpha = \frac{81 - 13}{4} = 17.$$

Donc l'aire maximale est 747 m^2

Exercice 2 — Parabole

10 points



1. À l'aide des points à coordonnées entières (représentés par des petits disques), déterminer (en détaillant le raisonnement) l'expression développée de la fonction f dont la courbe représentative est la parabole \mathcal{C}_f .

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(1; 0)$ et $(4; 0)$, donc $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$.

On sait que $f(0) = 2 = 4a$ donc $a = \frac{2}{4}$; donc $f(x) = 0,5(x - 1)(x - 4)$

Donc $f(x) = 0,5x^2 - 5 \times 0,5x + 2$

2. La parabole représentant la fonction k a pour équation : $k(x) = (x + 2)^2$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq k(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat.

Aide : si vous n'avez pas trouvé l'équation de la fonction f , alors résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $g(x) \geq k(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat; sachant que $g(x) = 0,2(x - 2)(x - 5)$.

Pour le plaisir d'avoir le cas général;-)

Les fonctions f sont de la forme : $f(x) = a(x-1)(x-4) = ax^2 - 5ax + 4a$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq k(x) &\Leftrightarrow f(x) - k(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - (x+2)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2 - 5ax + 4a - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (4+5a)x + 4(a-1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (4+5a)^2 - 4 \times (a-1) \times 4(a-1) = (4+5a)^2 - (4(a-1))^2 = (4+5a+4a-4)(4+5a-4a+4) = 9a \times (8+a)$$

or $a > 0$, donc $\Delta > 0$ on en déduit que $f(x) \geq k(x) \Leftrightarrow x \in$

$$\left[\frac{5a - 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2}; \frac{5a + 3\sqrt{a^2 + 8a + 4}}{2a - 2} \right]$$

• $a = 0,25 : x \in \left[\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-6,4; 0,7]$

• $a = 0,5 : x \in \left[\frac{-13 - 3\sqrt{17}}{2}; \frac{-13 + 3\sqrt{17}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-12,7; 0,3]$

• $a = 0,75 : x \in \left[\frac{-31 - 3\sqrt{105}}{2}; \frac{-31 + 3\sqrt{105}}{2} \right]$ ou bien $x \in [-30,9; 0,2]$

• $a = 1,25 : x \in \left[\frac{41 - 3\sqrt{185}}{2}; \frac{41 + 3\sqrt{185}}{2} \right]$ ou bien $x \in [0,1; 41]$

Les paraboles se coupent deux fois!

Exercice 3 — Probabilités

3,5 points

Voici la répartition des 500 paraboles créés lors des travaux sur les « parabolo-phères ».

	orientation	
	vers le haut	vers le bas
négatif sur $[0; 2]$	40	120
positif sur $[0; 2]$	85	255

On choisit une parabole au hasard et on note H l'événement « la parabole est orientée vers le haut » et N l'événement « la fonction est négative sur $[0; 2]$ ».

1. Calculer la probabilité de H, puis celle de N.

$$p(H) = \frac{40 + 85}{500}; p(N) = \frac{40 + 120}{500}$$

2. Calculer la probabilité de l'événement $H \cup N$.

$$p(H \cup N) = \frac{500 - 255}{500}$$

3. Les événements H et N sont-ils indépendants?

si $p(H) \times p(N) = p(H \cap N)$, alors les événements sont indépendants.

$$p(H \cap N) = \frac{40}{500}$$