

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

- Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
- À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
- Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n+4}{n+2}$.

a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

$$u_n \text{ de la forme } u_n = \frac{n+a}{n+2},$$

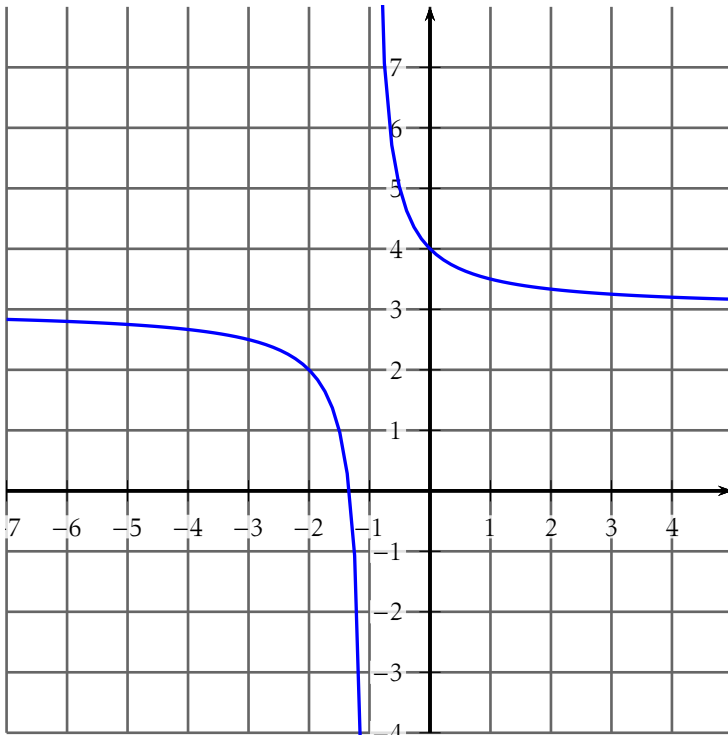
$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{2-a}{(n+2)(n+3)}.$$

Comme $n \in \mathbb{N} : n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N}^* par :
$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 4n - 7 \end{cases}.$$

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1. Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1; +\infty[$, d'où les variations...



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$.

- Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1; 4)$ et $(-5; 0)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C}_f .
- Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

$$\text{coefficient directeur : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

A	équation de la droite (AB)	x_2
(4; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 6)	$y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$	$-\frac{1}{4}$
(1; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 7)	$y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$	$-\frac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe \mathcal{C}_f .

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x+1} &= \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x - \frac{b}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) &= 0 \end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \frac{12-b}{2a}$

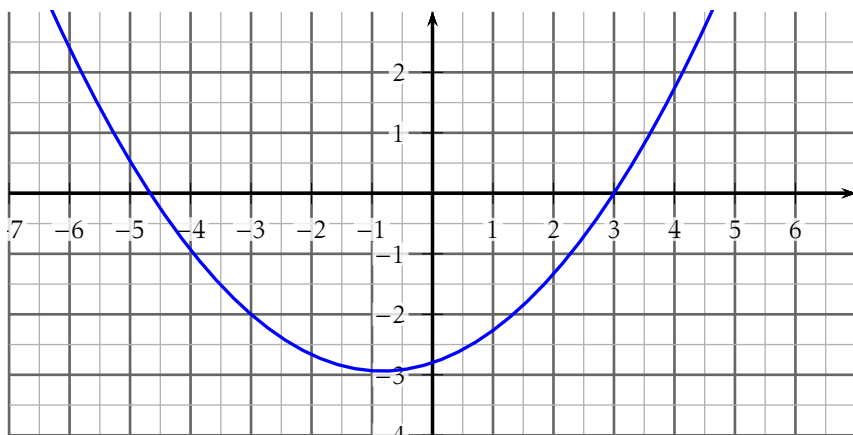
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-4) + 3$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n) .



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur \mathbb{N} .

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-4) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-4) - 3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-4) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-4))
 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-4) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0; 0); (x_1; 0); (x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs!) La suite (p_n) est définie sur \mathbb{N} par : $p_n = \frac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$

(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : p_n = \frac{1}{5}x_n + \frac{14}{15}$.

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

- Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
- À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
- Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n-6}{n+2}$.

a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

$$u_n \text{ de la forme } u_n = \frac{n+a}{n+2},$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{2-a}{(n+2)(n+3)}.$$

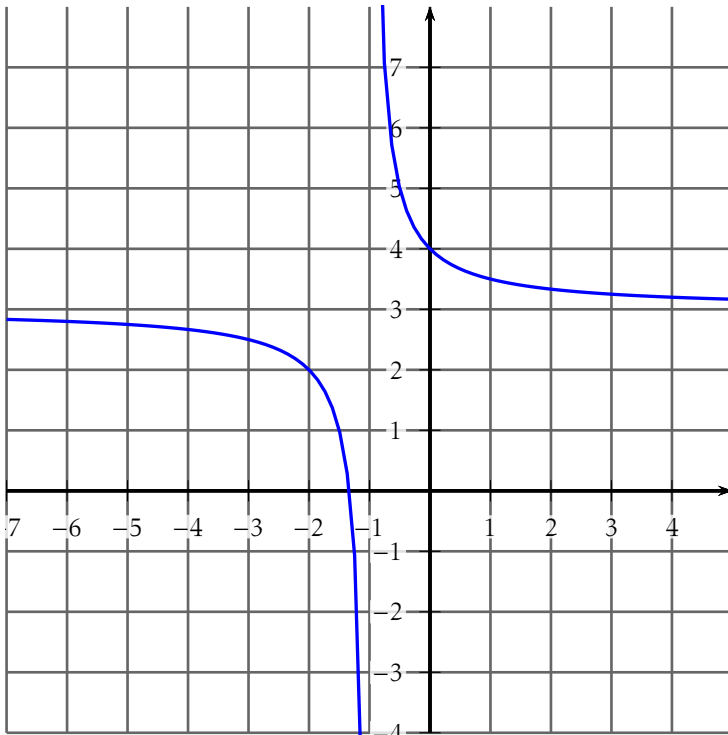
Comme $n \in \mathbb{N} : n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N}^* par :
$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 3n^2 - n + 4 \end{cases}.$$

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1.

Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1; +\infty[$, d'où les variations...



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$.

- Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1; 6)$ et $(-5; -2)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C}_f .
- Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

$$\text{coefficient directeur : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

A	équation de la droite (AB)	x_2
(4; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 6)	$y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$	$-\frac{1}{4}$
(1; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 7)	$y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$	$-\frac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe \mathcal{C}_f .

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x+1} &= \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x - \frac{b}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) &= 0 \end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \frac{12-b}{2a}$

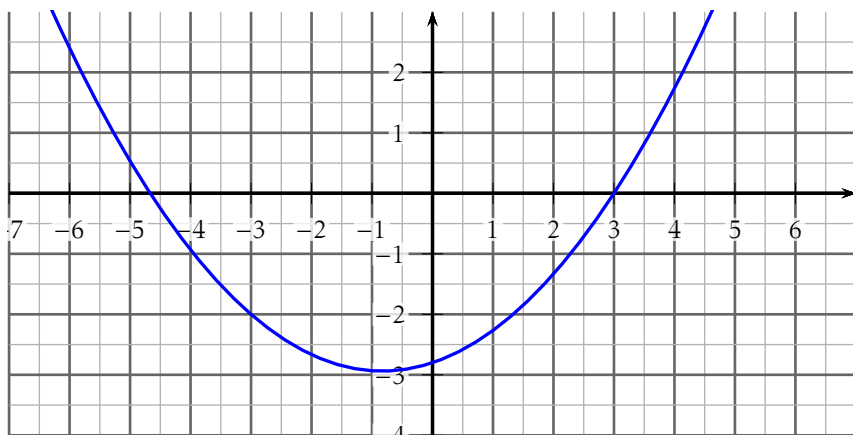
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-6) + 3$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n) .



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur \mathbb{N} .

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-6) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-6) - 3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-6) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-6))
 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-6) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0; 0); (x_1; 0); (x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs!) La suite (p_n) est définie sur \mathbb{N} par : $p_n = \frac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$

(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : p_n = \frac{1}{5}x_n + \frac{14}{15}$.

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

- Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
- À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
- Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n+6}{n+2}$.

a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

u_n de la forme $u_n = \frac{n+a}{n+2}$,

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{2-a}{(n+2)(n+3)}$.

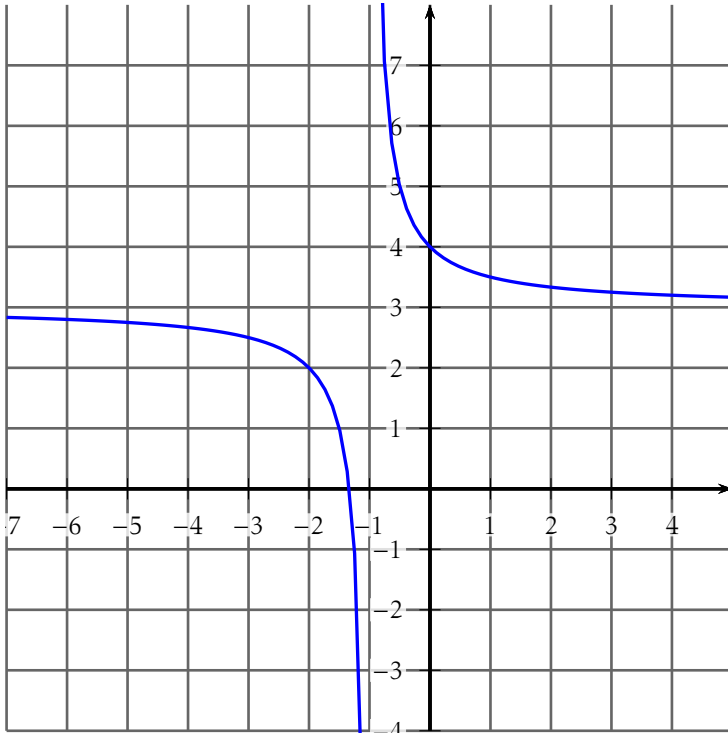
Comme $n \in \mathbb{N} : n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 3n^2 - 2n + 5 \end{cases}$.

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1.

Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1; +\infty[$, d'où les variations...



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1; 4)$ et $(-5; 0)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C}_f .
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

$$\text{coefficient directeur : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

A	équation de la droite (AB)	x_2
(4; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 6)	$y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$	$-\frac{1}{4}$
(1; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 7)	$y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$	$-\frac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe \mathcal{C}_f .

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x+1} &= \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x - \frac{b}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) &= 0 \end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \frac{12-b}{2a}$

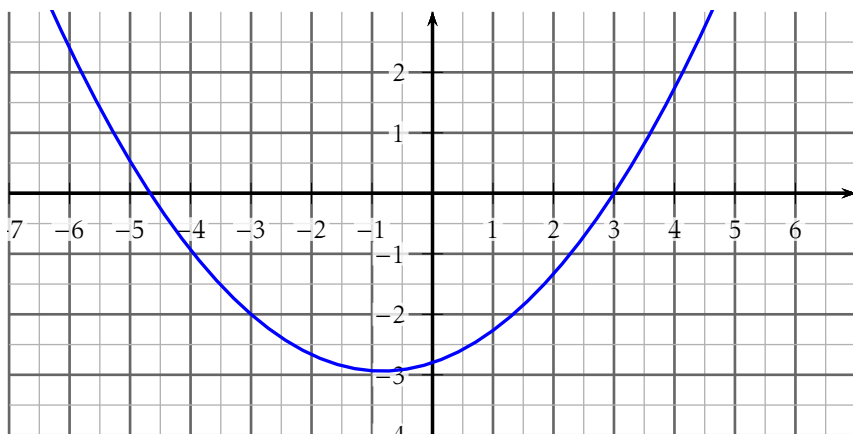
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-5) + 3$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n) .



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur \mathbb{N} .

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-5) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-5) - 3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-5) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-5))
 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-5) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0; 0); (x_1; 0); (x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs!) La suite (p_n) est définie sur \mathbb{N} par : $p_n = \frac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$

(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : p_n = \frac{1}{5}x_n + \frac{14}{15}$.

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

- Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
- À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
- Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n-3}{n+2}$.

a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

$$u_n \text{ de la forme } u_n = \frac{n+a}{n+2},$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{2-a}{(n+2)(n+3)}.$$

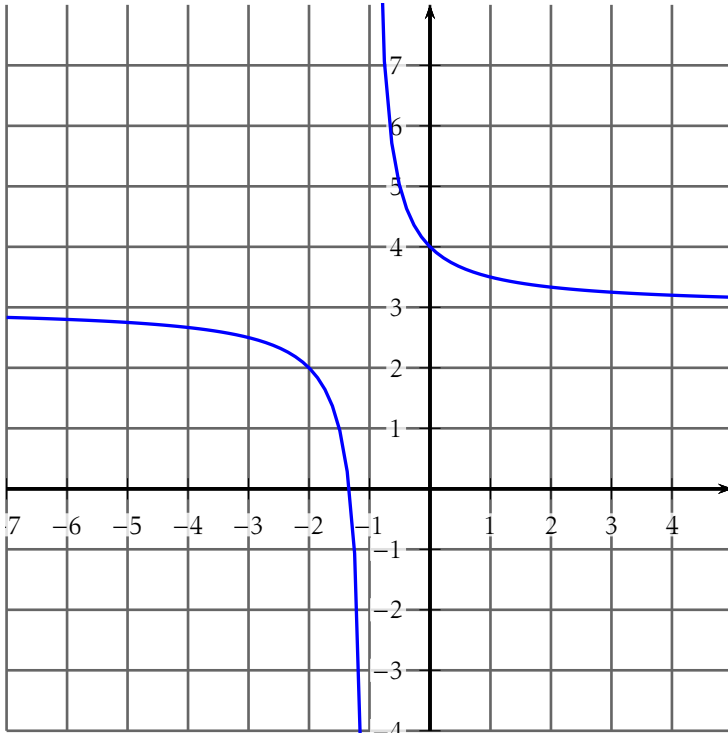
Comme $n \in \mathbb{N} : n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N}^* par :
$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + n - 4 \end{cases}$$

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1.

Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1; +\infty[$, d'où les variations...



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup$

$]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1; 7)$ et $(-5; -3)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C}_f .
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

$$\text{coefficient directeur : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

A	équation de la droite (AB)	x_2
(4; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 6)	$y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$	$-\frac{1}{4}$
(1; 4)	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$
(1; 7)	$y = \frac{5}{3}x + \frac{16}{3}$	$-\frac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe \mathcal{C}_f .

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x+1} &= \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x - \frac{b}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) &= 0 \end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \frac{12-b}{2a}$

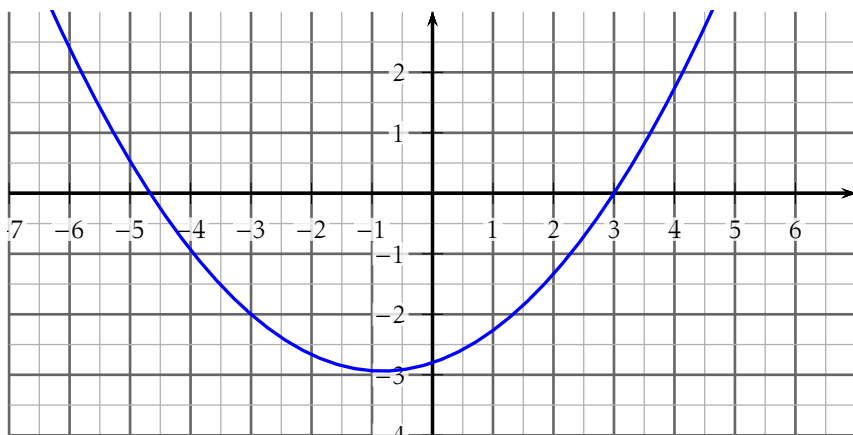
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) + 3$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n) .



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur \mathbb{N} .

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-7) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) - 3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-7))
 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-7) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0; 0); (x_1; 0); (x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs!) La suite (p_n) est définie sur \mathbb{N} par : $p_n = \frac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$

(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : p_n = \frac{1}{5}x_n + \frac{14}{15}$.

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

