A

C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+4}{n+2}$.

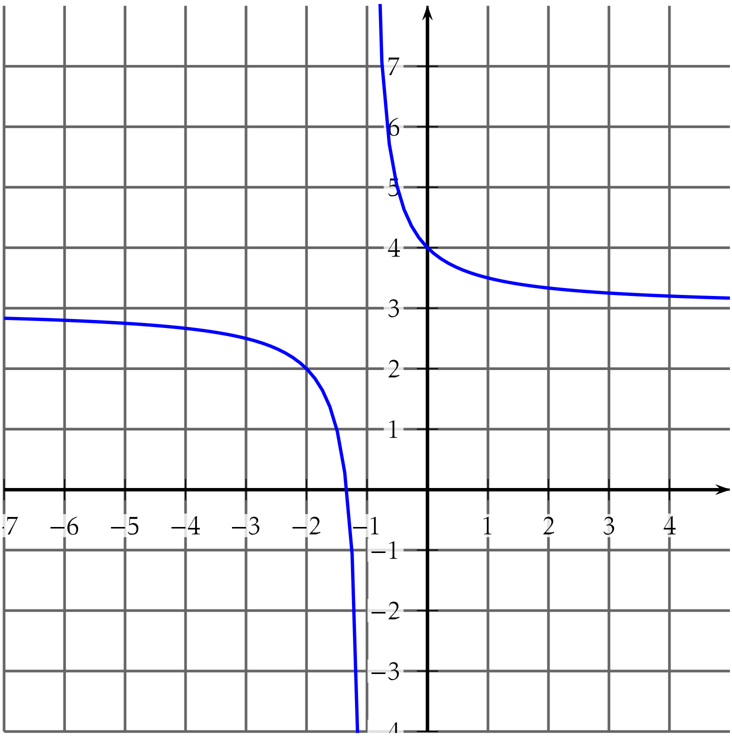
a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

u_n de la forme $u_n = \dfrac{n+a}{n+2}$,
donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-a}{(n+2)(n+3)}$.
Comme $n \in \mathbb{N}$: $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 4n - 7 \end{cases}$.

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1.
Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1\,;+\infty[$, d'où les variations…



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;4)$ et $(-5\,;0)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}_f$.
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$y = m(x - x_A) + yA$

A	équation de la droite (AB)	x_2
$(4;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1;6)$	$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{14}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$
$(1;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1;7)$	$y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3}$	$-\dfrac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} &\frac{3x+4}{x+1} = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow &-ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) = 0 \end{aligned}$$

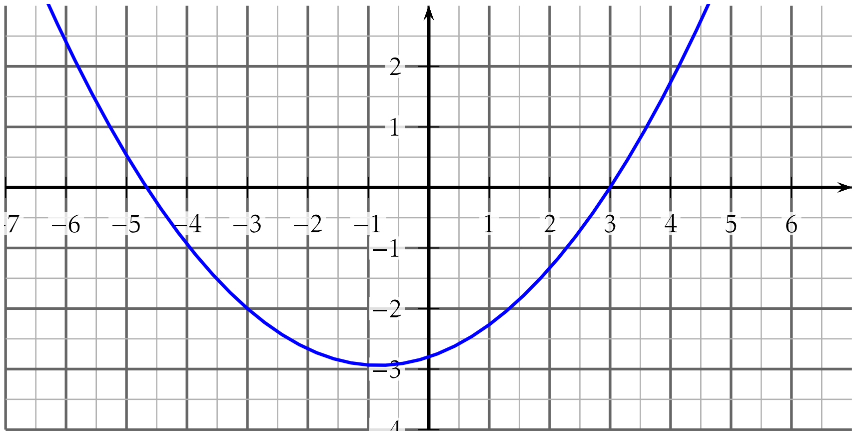
Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \dfrac{12-b}{2a}$

Exercice 3 — Une belle construction *5 points*

Le graphique représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times (-4) + 3$

   a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n).



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-4) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-4) - 3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-4) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-4)) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-4) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0\,;0);(x_1\,;0);(x_2\,;0)$ et $(x_3\,;0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs !) La suite (p_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $p_n = \dfrac{f(x_n)-f(3)}{x_n-3}$
(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$.

   On remarque que 3 est une racine évidente : en effet
   $f(3) = \dfrac{1}{5} \times 3^2 + \dfrac{1}{3} \times 3 - \dfrac{14}{5} = 0.$
   Le produit des racines est $\dfrac{-\frac{14}{5}}{\frac{1}{5}} = -14$, donc la deuxième racine est $\dfrac{14}{3}$.
   donc $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(x + \dfrac{14}{3}\right)(x-3)$ et $f(3) = 0$.
   Donc $p_n = \dfrac{1}{x_n - 3} \times \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right)(x_n - 3) = \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$

   b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

   Si B est le point de coordonnées $(3\,;0)$, et C_n le point de coordonnées $(x_n\,;f(x_n))$, alors p_n représente le coefficient directeur de la droite (C_nB). On remarque à l'aide d'une lecture graphique et/ou du calcul des termes de (p_n) que plus n est grand, plus p_n semble proche de 1,533 3.

B

C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-6}{n+2}$.

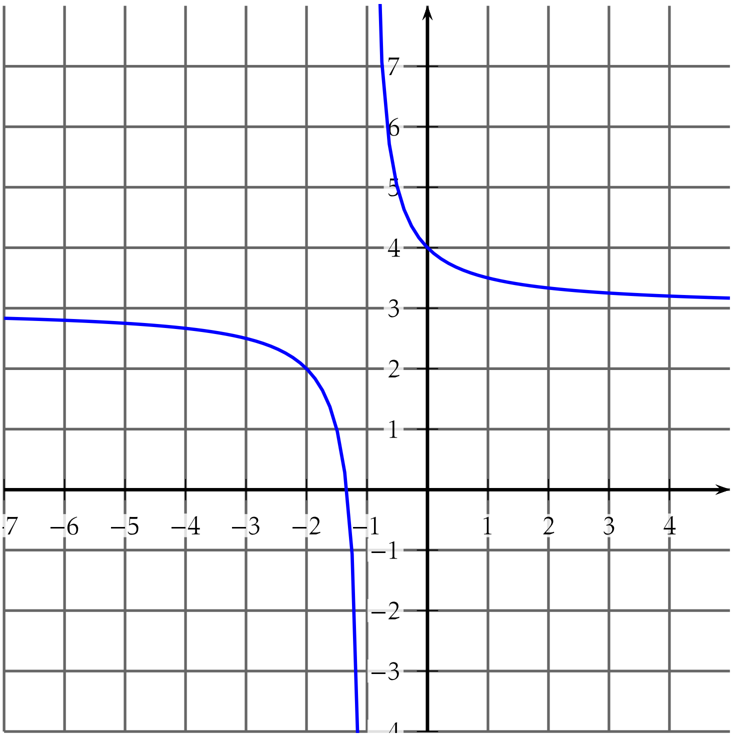
a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

u_n de la forme $u_n = \dfrac{n+a}{n+2}$, donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-a}{(n+2)(n+3)}$. Comme $n \in \mathbb{N}$: $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 3n^2 - n + 4 \end{cases}$.

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1. Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1\,;+\infty[$, d'où les variations…



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1;6)$ et $(-5;-2)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}_f$.
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$y = m(x - x_A) + y\text{A}$

A	équation de la droite (AB)	x_2
$(4\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;6)$	$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{14}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$
$(1\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;7)$	$y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3}$	$-\dfrac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} & \frac{3x+4}{x+1} = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & -ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) = 0 \end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \dfrac{12-b}{2a}$

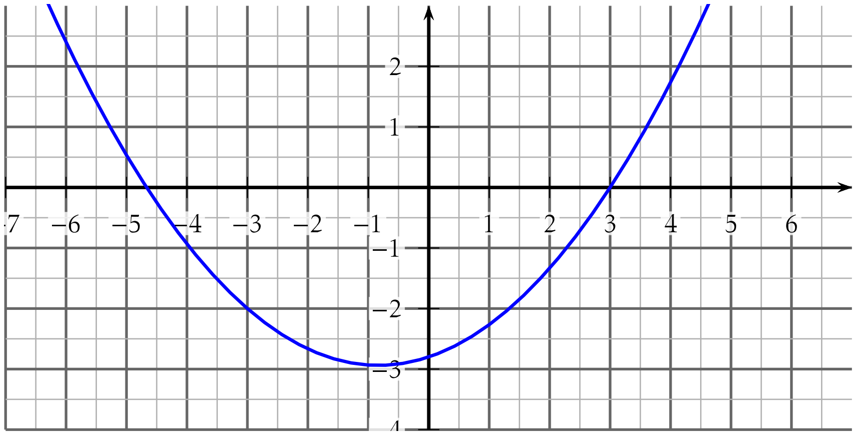
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times (-6) + 3$

   a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n).



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-6) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-6) - 3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-6) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-6)) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-6) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0\,;0);(x_1\,;0);(x_2\,;0)$ et $(x_3\,;0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs !) La suite (p_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $p_n = \dfrac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$
(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$.

On remarque que 3 est une racine évidente : en effet
$f(3) = \dfrac{1}{5} \times 3^2 + \dfrac{1}{3} \times 3 - \dfrac{14}{5} = 0$.
Le produit des racines est $\dfrac{-\frac{14}{5}}{\frac{1}{5}} = -14$, donc la deuxième racine est $\dfrac{14}{3}$.
donc $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(x + \dfrac{14}{3}\right)(x-3)$ et $f(3) = 0$.
Donc $p_n = \dfrac{1}{x_n - 3} \times \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right)(x_n - 3) = \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Si B est le point de coordonnées $(3\,;0)$, et C_n le point de coordonnées $(x_n\,;f(x_n))$, alors p_n représente le coefficient directeur de la droite (C_nB). On remarque à l'aide d'une lecture graphique et/ou du calcul des termes de (p_n) que plus n est grand, plus p_n semble proche de 1,533 3.

C

C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+6}{n+2}$.

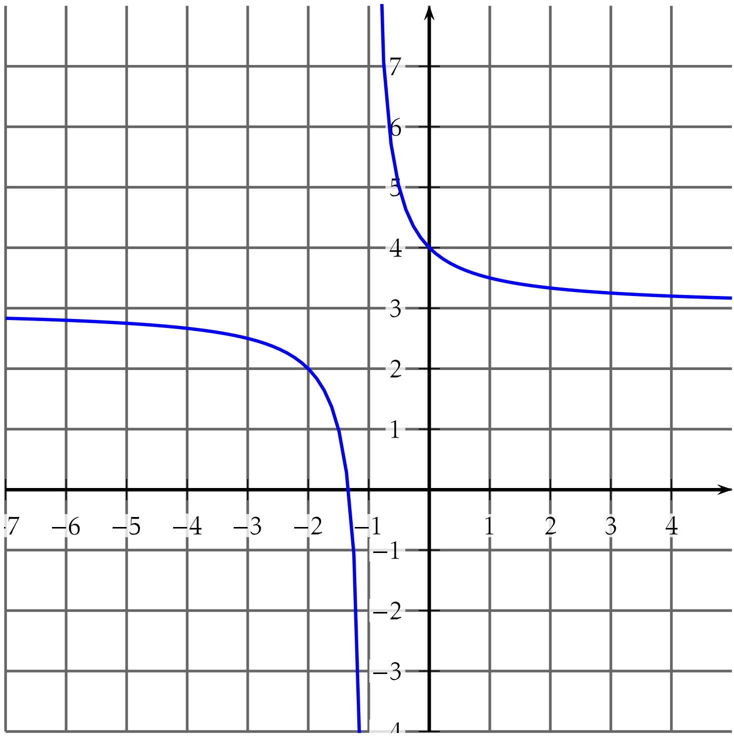
a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

u_n de la forme $u_n = \dfrac{n+a}{n+2}$,
donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-a}{(n+2)(n+3)}$.
Comme $n \in \mathbb{N}$: $n+2>0$ et $n+3>0$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 3n^2 - 2n + 5 \end{cases}$.

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1.
Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1\,;+\infty[$, d'où les variations…



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;4)$ et $(-5\,;0)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$y = m(x - x_A) + y\mathrm{A}$

A	équation de la droite (AB)	x_2
$(4\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;6)$	$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{14}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$
$(1\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;7)$	$y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3}$	$-\dfrac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned}
&\frac{3x+4}{x+1} = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3}\\
\Leftrightarrow &\frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} = 0\\
\Leftrightarrow &-ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) = 0
\end{aligned}$$

Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \dfrac{12-b}{2a}$

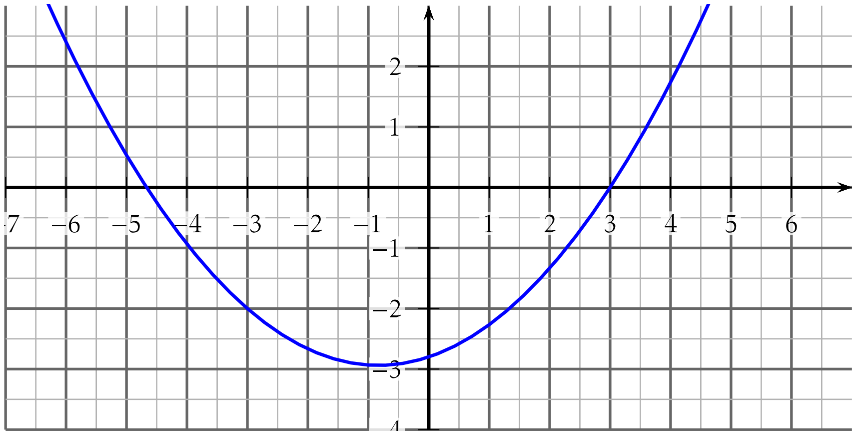
Exercice 3 — Une belle construction

5 points

Le graphique représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times (-5) + 3$

   a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n).



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\dfrac{5}{2}$
-6	-3	0	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{9}{4}$
-5	-2	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{18}{4}$
-7	-4	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times(-5)+3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times(-5)-3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times(-5)\times\left(\frac{1}{2}-1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times(-(-5)) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{2}>0$, donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}>0$ et $-(-5)>0$, donc $x_{n+1}-x_n>0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0\,;0);(x_1\,;0);(x_2\,;0)$ et $(x_3\,;0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs !) La suite (p_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $p_n = \dfrac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$
(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$.

On remarque que 3 est une racine évidente : en effet
$f(3) = \dfrac{1}{5} \times 3^2 + \dfrac{1}{3} \times 3 - \dfrac{14}{5} = 0$.
Le produit des racines est $\dfrac{-\frac{14}{5}}{\frac{1}{5}} = -14$, donc la deuxième racine est $\dfrac{14}{3}$.
donc $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(x + \dfrac{14}{3}\right)(x-3)$ et $f(3) = 0$.
Donc $p_n = \dfrac{1}{x_n - 3} \times \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right)(x_n - 3) = \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Si B est le point de coordonnées $(3\,;0)$, et C_n le point de coordonnées $(x_n\,;f(x_n))$, alors p_n représente le coefficient directeur de la droite (C_nB). On remarque à l'aide d'une lecture graphique et/ou du calcul des termes de (p_n) que plus n est grand, plus p_n semble proche de 1,5333.

D C04

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Suites

9 points

Pour chacune des suites suivantes :

1. Donner les valeurs exactes des trois premiers termes.
2. À l'aide de la calculatrice (inutile d'expliquer), conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer le sens de variation à l'aide de l'étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$.

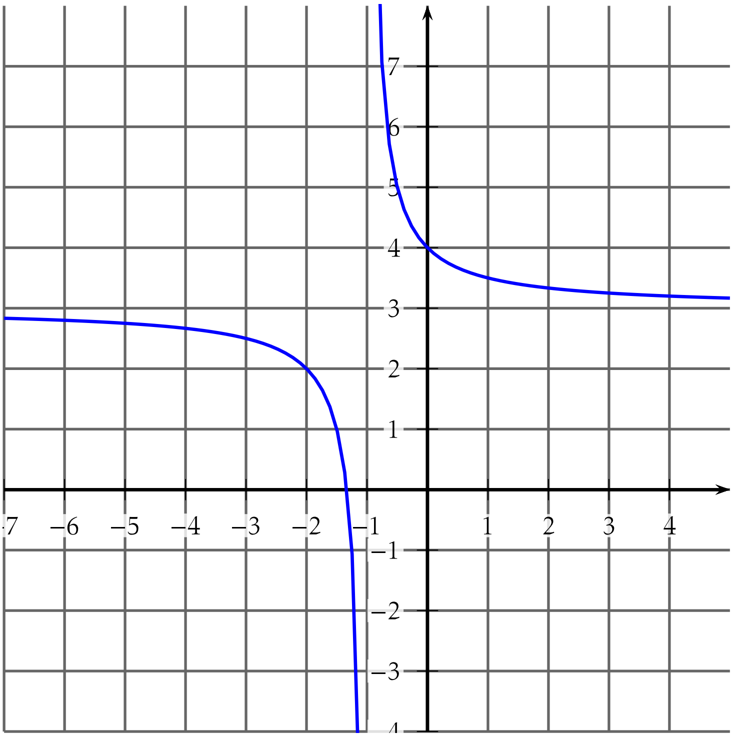
a	u_0	u_1	u_2	u_3
4	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
-6	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$
6	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$
-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

u_n de la forme $u_n = \dfrac{n+a}{n+2}$,
donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-a}{(n+2)(n+3)}$.
Comme $n \in \mathbb{N}$: $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(2-a)$.

- La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + n - 4 \end{cases}$.

a	v_1	v_2	v_3	v_4
$\frac{7}{3}$	3	3	16	48
$\frac{4}{3}$	3	3	-7	-33
$\frac{5}{3}$	3	3	-8	-36
$\frac{4}{3}$	3	3	13	39

$v_{n+1} - v_n$ est polynôme de de degré 2 qui s'annule en a (tableau) et en 1. Donc le signe de la différence est celui du coefficient de n^2 sur $[1\,;+\infty[$, d'où les variations…



graphe de la fonction de l'exercice 2.

Exercice 2 — Équation de droite

6 points

Le graphique représente la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$.

1. Placer sur le graphique les points A et B de coordonnées respectives $(1;7)$ et $(-5;-3)$, puis tracer la droite (AB). Lire les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}_f$.
2. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB).

coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$y = m(x - x_A) + y\mathrm{A}$

A	équation de la droite (AB)	x_2
$(4\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;6)$	$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{14}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$
$(1\,;4)$	$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
$(1\,;7)$	$y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3}$	$-\dfrac{2}{5}$

3. Déterminer par le calcul les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de la droite (AB) avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier :

$$\begin{aligned} &\frac{3x+4}{x+1} = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{3x+4}{x+1} - \frac{a}{3}x + \frac{b}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow &-ax^2 + (9-a-b)x + (12-b) = 0 \end{aligned}$$

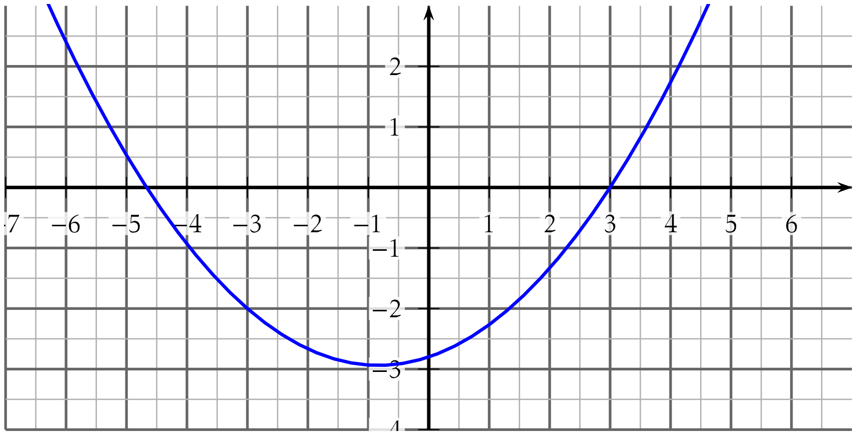
Or $x = -2$ est une solution évidente, donc l'autre solution est $x = \dfrac{12-b}{2a}$

Exercice 3 — Une belle construction *5 points*

Le graphique représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{14}{5}$

1. La suite x_n est définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times (-7) + 3$

   a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n).



graphe de la fonction de l'exercice 3.

coeff	x_0	x_1	x_2	x_3
-4	-1	1	2	$\frac{5}{2}$
-6	-3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-5	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{4}$
-7	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{8}$

b) Démontrer que la suite (x_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-7) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-7) - 3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-7) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (-(-7)) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et $-(-7) > 0$, donc $x_{n+1} - x_n > 0$, la suite est croissante.

c) Placer sur le graphique les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(x_0\,;0);(x_1\,;0);(x_2\,;0)$ et $(x_3\,;0)$.

2. (Attention : question bonus. À faire tout à la fin et utiliser des astuces de calculs !) La suite (p_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $p_n = \dfrac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3}$
(on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n < 3$).

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$.

On remarque que 3 est une racine évidente : en effet
$f(3) = \dfrac{1}{5} \times 3^2 + \dfrac{1}{3} \times 3 - \dfrac{14}{5} = 0$.
Le produit des racines est $\dfrac{-\frac{14}{5}}{\frac{1}{5}} = -14$, donc la deuxième racine est $\dfrac{14}{3}$.
donc $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(x + \dfrac{14}{3}\right)(x-3)$ et $f(3) = 0$.
Donc $p_n = \dfrac{1}{x_n - 3} \times \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right)(x_n - 3) = \dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{14}{15}$

b) À l'aide de la calculatrice et/ou de considérations géométriques déterminer la valeur de p_n quand n devient très grand.

Si B est le point de coordonnées $(3;0)$, et C_n le point de coordonnées $(x_n\,; f(x_n))$, alors p_n représente le coefficient directeur de la droite (C_nB). On remarque à l'aide d'une lecture graphique et/ou du calcul des termes de (p_n) que plus n est grand, plus p_n semble proche de $1{,}533\,3$.