## ____oO° Devoir commun 1$^{ere}$ Spé Maths °Oo____

40 points (prise en compte de rédaction générale) – 2 heures

Les notes seront sur le site de M. Léon :
`http ://frederic.leon77.free.fr > E.Bronte > 1 spé`
Attention : les notes seront associées au numéro de candidat (voir liste d'émargement)
Garder le sujet et écrire ici votre numéro d'anonymat : ␣ ␣ ␣

### Exercice 1 — L'attaque du Faucon !

*13 points*

Le faucon pèlerin est un rapace dont la technique de chasse consiste à attaquer par l'arrière et en piqué des oiseaux en plein vol.
Il peut se laisser tomber presque à la verticale d'une hauteur de 500 m sur sa proie.
La fonction suivante donne de façon simplifiée la distance verticale parcourue en mètres par un faucon lors du piqué sur un pigeon, en fonction du temps, en seconde, à partir du moment où il commence sa descente :

$$d(t) = 5t^2 + 25t$$

#### Partie A – Paf ! le pigeon

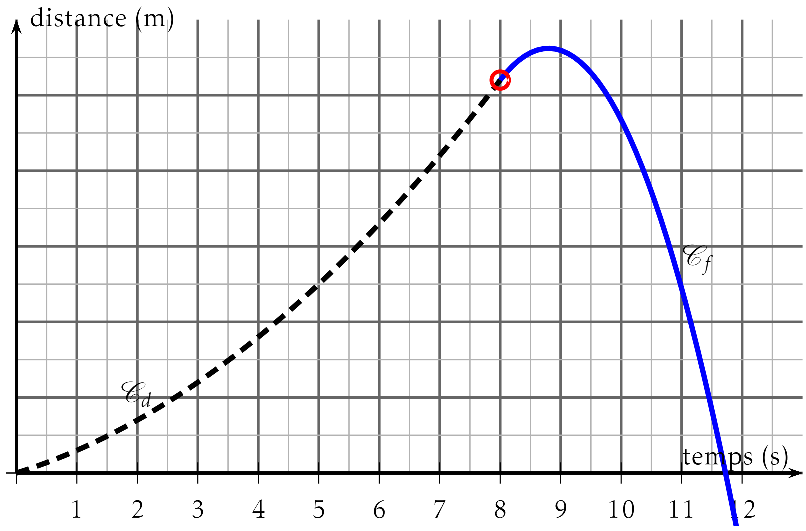
1. Rappel : la vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps.
   Déterminez la vitesse initiale du faucon (c'est à dire pour $t = 0$) en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ puis en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
   $d(t) = 5t^2 + 25t$ donc $d'(t) = 5 \times 2t + 25 = 10t + 25$
   on calcule $d'(0) = 25$ donc la vitesse du faucon est de $25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   $25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times 3{,}6 = 90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
2. L'attaque a duré 8 secondes.
   a) Calculer la distance parcourue pendant le piqué.
   $d(8) = 5 \times 8^2 + 25 \times 8 = 520$.
   Le faucon a parcouru 520 mètres.
   b) Déterminer la vitesse moyenne du faucon lors du piqué en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   $$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}} = \frac{520}{8} = 65.$$
   c) Déterminer la vitesse (en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ) avec laquelle il a percuté le pigeon.
   La vitesse instantanée est la dérivée de la distance, donc $d'(8) = 10 \times 8 + 25 = 105$
   Or $105\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times 3{,}6 = 378\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

#### Partie B – Miam ! le pigeon

Au moment où il attrape le pigeon, le faucon change son vol pour atterrir dans une verdoyante prairie, déposer le pigeon et repartir à sa hauteur initiale.

Le graphique (qui n'est pas à l'échelle) représente cette situation en donnant la distance verticale parcourue depuis le début de l'attaque (arc de parabole en pointillés, représentant la fonction $d$), puis le vol retour (arc de parabole en trait plein, représentant la fonction $f$). Le petit cercle représente le point d'impact avec le pigeon.

On admet que $f$ est la parabole d'équation $f(x) = -65{,}625x^2 + 1\,155x - 4\,520$.




**1.** Donner la forme canonique de $f$. En déduire à quelle hauteur par rapport au sol était le faucon au début de l'attaque (quand $x = 0$).

la forme canonique de $f$ est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $(\alpha\,;\beta)$ les coordonnées du sommet.

donc $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$f(x) = -\dfrac{525}{8}\left(x - \dfrac{44}{5}\right)^2 + 562$

Le niveau du sol correspond au sommet de $\mathscr{C}_f$, donc le faucon était à 562 mètres au dessus du sol.

**2.** Résoudre $f(x) = 0$. Interpréter ce résultat dans le contexte.

équation du second degré : deux solutions $x_1 \approx 11{,}73$ et $x_2 \approx 5{,}87$.

Environ 11,7 s après le début de l'attaque, le faucon est revenu à sa hauteur initiale.

## Exercice 2 — Pression atmosphérique

*13 points*

d'après : p 240 n° 17

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres : l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut du Puy-de-Dôme.

Florin Périer a constaté que cette hauteur dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à celle dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.

Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa). On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 hPa au niveau de la mer.

### Partie A – Une règle simplifiée

Les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante :

« La pression atmosphérique diminue de 0,11 hPa quand l'altitude augmente de 1 mètre. »

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de $n$ mètres calculée avec la règle simplifiée.

Ainsi $u_0 = 1\,013{,}25$.

**1. a)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

$u_1 = u_0 - 0{,}11 = 1\,013{,}14$

$u_2 = u_1 - 0{,}11 = 1\,013{,}03$

**b)** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ et préciser sa raison.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant $(-0{,}11)$ donc $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $(-0{,}11)$.

2. Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

par définition d'une suite arithmétique, $u_n = u_0 + nr$ donc ici : $u_n = 1\,013{,}25 - 0{,}11n$.

3. a) Le Puy-de-Dôme culmine à 1 465 mètres d'altitude. Calculer la pression atmosphérique au sommet.

   Il faut calculer $u_{1\,465} = 1\,013{,}25 - 0{,}11 \times 1\,465 = 852{,}08$

   Donc au sommet du Puy-de-Dôme la pression atmosphérique est d'environ 852 hPa

   b) Déterminer l'altitude à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

   On cherche $n$ (entier) tel que $u_n \leqslant 950$

$$\begin{aligned}
&1\,013{,}25 - 0{,}11 \times n \leqslant 900\\
\Leftrightarrow &1\,013{,}25 - 950 \leqslant 0{,}11 \times n\\
\Leftrightarrow &n \geqslant \frac{1\,013{,}25 - 950}{0{,}11}\\
\Leftrightarrow &n \geqslant 575
\end{aligned}$$

   Si l'altitude est supérieure à 575 m, la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

**Partie B – La formule barométrique**

Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 1\,013{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}12x}$$

associe à l'altitude ($x$ en kilomètre) la pression atmosphérique (en hectopascal).

1. Calculer $f(0)$.

   $f(0) = 1\,013{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0}$ or $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $f(0) = 1\,013{,}25$.

2. Déterminer les variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

   Les variations dépendent du signe de la dérivée.

   **Dérivée de $f$.**

   $f$ est de la forme $k\,\mathrm{e}^{ax+b}$ donc sa dérivée est de la forme $k \times a\,\mathrm{e}^{ax+b}$ ; avec $k = 1\,013{,}25$ ; $a = -0{,}12$ et $b = 0$.

   $f'(x) = 1\,013{,}25 \times (-0{,}12) \times \mathrm{e}^{-0{,}12x} = -121{,}59\,\mathrm{e}^{-0{,}12x}$

   **Signe de $f'(x)$**

   On sait que quelque soit $y \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{e}^y > 0$, donc $\mathrm{e}^{-0{,}12x} > 0$, on en déduit que $f'(x) < 0$ et que la fonction $f$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. Calculer $f(1{,}465)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   $f(1{,}465) = 1\,013{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}12\times 1{,}465} \approx 849{,}90$.

   On retrouve environ la pression atmosphérique en haut du Puy-de-Dôme.

## Exercice 3 — Dopage

*14 points*

d'après : p 374 n° 2

À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage. Or, d'une part, certains produits dopants sont indétectables aux contrôles, d'autre part, certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif.

Le comité rend donc les résultats de ses tests avec un risque d'erreurs. On considère les événements

- D « le sportif est dopé » ;
- T « le sportif est déclaré positif » ;
- E « le comité a commis une erreur ».

### Partie A – La fréquence des dopés est connue

Dans cette partie, on suppose que 35 % des sportifs sont dopés et que la probabilité d'être déclaré positif est indépendante de l'état réel du sportif (dopé ou non).

Lors d'une étude sur des compétitions antérieures, on a pu observer que ce comité déclarait négatifs 62 % des sportifs.

On choisit un sportif au hasard.

Dans cette partie, justifier les calculs à l'aide d'une ou plusieurs expressions parmi : « événements indépendants », « événements contraires », « probabilités conditionnelles », « probabilités totales ».

**1.** Donner (en justifiant) la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé.
on cherche $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})$ or les événement T et D sont indépendants, donc $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}) = p(\mathrm{T})$
On sait que 62 % des sportifs sont déclarés négatifs, donc $p(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}62$ ; d'où $p(\mathrm{T}) = 1 - p(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}38$.

**2.** Calculer la probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif.
« dopé et déclaré négatif » correspond à l'événement $\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{T}}$.
$p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{T}}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{T}})$ (probabilités conditionnelles)
or $p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - p_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})$ (événements contraire),
donc $p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - p(\mathrm{T})$ (événements indépendants) $p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}62$
et $p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{T}}) = 0{,}35 \times 0{,}62 = 0{,}217$

**3.** On admet que la probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif est 0,247.
En déduire la probabilité de l'événement E. Interpréter cette probabilité dans le contexte.
E signifie que le comité a commis une erreur, c'est à dire (le sportif est dopé et il est déclaré négatif) ou (le sportif n'est pas dopé et il est déclaré positif) ;
donc $\mathrm{E} = (\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{T}}) \cup (\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{T})$ et $p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{D} \cap \mathrm{N}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{N}}) = 0{,}217 + 0{,}247 = 0{,}464$
La probabilité de faire de diagnostique est de 46,4 %.

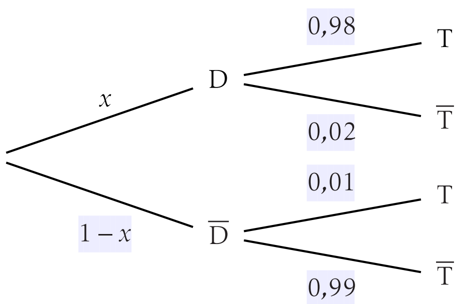
### Partie B – La fréquence des dopés n'est pas connue

Dans cette partie, on note $x$ la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés. On suppose que :

- sachant que le sportif est dopé, la probabilité qu'il soit déclaré positif est égale à 0,98 ;
- sachant que le sportif n'est pas dopé, la probabilité qu'il soit déclaré positif est égale à 0,01.

On choisit un sportif au hasard.

**1.** Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous traduisant la situation.




**2.** Exprimer, en fonction de $x$, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.

$$\begin{aligned} p(\mathrm{T}) &= p(\mathrm{D} \cap \mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{T}) \\ &= 0{,}98x + (1-x) \times 0{,}01 \\ &= 0{,}97x + 0{,}01 \end{aligned}$$

3. En détaillant les calculs, montrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant qu'il a été déclaré positif est égale à : $\dfrac{98x}{97x+1}$

on cherche $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{D})$, or $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{T} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}98x}{0{,}97x+0{,}01} = \dfrac{0{,}98x \times 100}{(0{,}97x+0{,}01) \times 100} = \dfrac{98x}{97x+1}$

4. On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{98x}{97x+1}$$

**a)** Calculer $f'(x)$ la dérivée de la fonction $f$ sur $[0\,;1]$.

$f$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec
- $u(x) = 98x$ et $u'(x) = 98$
- $v(x) = 97x+1$ et $v'(x) = 97$

donc $f'(x) = \dfrac{98 \times (97x+1) - 98x \times 97}{(97x+1)^2} = \dfrac{98}{(97x+1)^2}$

**b)** Déterminer le sens de variations de $f$ sur $[0\,;1]$.

pour tout $x \in [0\,;1] : (97x+1)^2 > 0$, donc pour tout $x \in [0\,;1] : f'(x) > 0$.
La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

**c)** Le test est jugé fiable si la proportion de sportifs dopés, sachant qu'ils sont testés positifs, est supérieure à 0,95. Déterminer la proportions de sportifs dopés à partir de la quelle ce test est considéré comme fiable.

on cherche à résoudre $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{D}) > 0{,}95$ ; c'est à dire $f(x) > 0{,}95$

$f(x) > 0{,}95 \Leftrightarrow \dfrac{98x}{97x+1} > 0{,}95$

or sur $[0\,;1] : 97x+1 > 0$, donc $f(x) > 0{,}95 \Leftrightarrow 98x > 0{,}95 \times (97x+1) \Leftrightarrow x > 0{,}16$

Si la proportion de sportifs dopés est supérieure à 16 % alors le test est fiable à plus de 95 %.