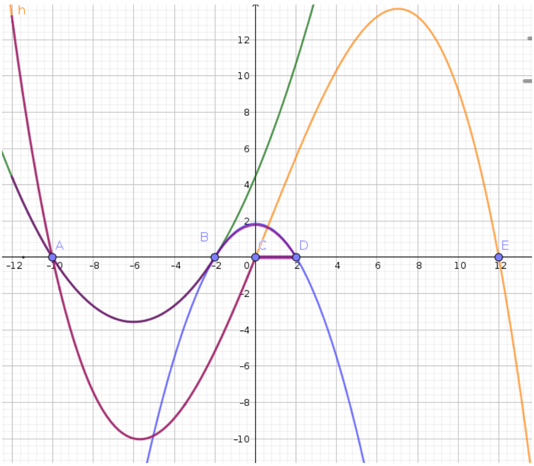
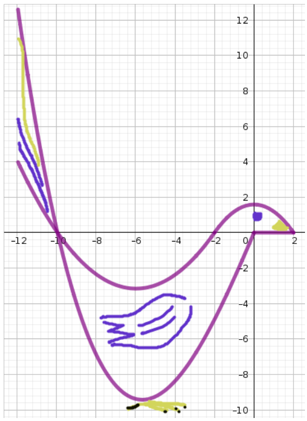
LA POULE DE PÂQUES

Les poules sont composées de deux arcs de paraboles : l'un passant par les points A et B qui forme le dos et une partie de la queue, l'autre entre les points B et D qui forme la tête ; et d'une cubique qui passe par les points A, C et E qui forme le ventre et la partie supérieure de la queue. Le bas du bec est le segment [CD].

Une fois crées, les poules peuvent être décorées !





Partie A – Données

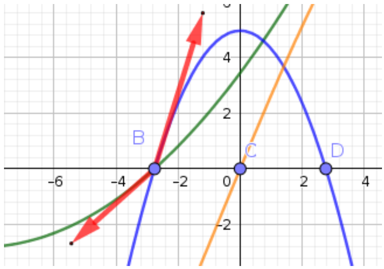
- Les points A, B, C, D et E sont sur l'axe des abscisses.
- le point C a pour coordonnées $(0;0)$ et le point D est le symétrique de B par rapport à C.
- la parabole passant par A et B est la représentation de la fonction :
  $f(x) = \alpha(x - x_A)(x - x_B)$.
- la parabole passant par B et D est la représentation de la fonction :
  $g(x) = \beta(x - x_B)(x - x_D)$.
- la cubique passant par A, C et E est la représentation de la fonction :
  $h(x) = \gamma(x - x_A)(x - x_C)(x - x_E)$

À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C, D et E, puis les curseurs α, β et γ.

Trouver les valeurs de α, β et γ qui permettent de dessiner votre poule et écrire sur votre copie les **uniquement** les équations de f et h (celle de g risque de changer !)

Partie B – Dos et tête

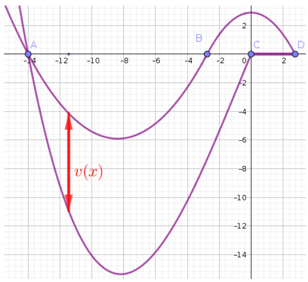
Pour que la poule ait une certaine élégance, il ne faut pas de « cassure » entre le dos et la tête.
L'image montre une cassure : la tangente en B à la courbe de f (arc de parabole vert) n'est pas « alignée » avec la tangente en B à la courbe g (arc de parabole bleu).



1. Déterminer une condition nécessaire pour que les tangentes soient « alignées ».
2. Déterminer la dérivée de f et puis calculer $f'(x_B)$.
3. Déterminer la dérivée de g en fonction de β et donner l'expression de $g'(x_B)$ en fonction de β (ne pas prendre de valeur numérique pour β).
4. En déduire la valeur de β qui permet d'*aligner* les tangentes.
5. Donner l'équation de g. Si cela vous donne une poule que vous jugez peu harmonieuse : recommencer le travail en choisissant une d'autres points et/ou d'autres valeurs pour les coefficients α et γ !

Partie C – Ventre

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction v qui représente la « hauteur du ventre ».
On définit cette fonction v sur $[x_A\,;x_B]$ par $v(x) = f(x) - h(x)$.



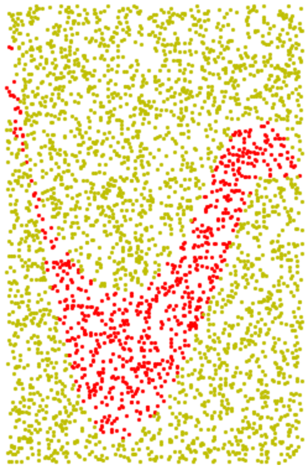
1. Déterminer l'expression de la fonction v (c'est un polynôme de degré 3), puis celle de sa dérivée.
2. Déterminer le signe de $v'(x)$ sur l'intervalle $[x_A\,;x_B]$; construire le tableau de variations de la fonction v sur $[x_A\,;x_B]$.
3. En déduire la valeur de x_0 (réel de $[x_A\,;x_B]$) tel que $v(x)$ soit maximale, puis calculer la hauteur maximale du « ventre de la poule » (arrondir au dixième).

Partie D – Aire de la poule

Dans cette partie, on cherche à calculer l'aire de la poule à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.
Le programme (à envoyer par mail) doit afficher une image de la poule et doit donner l'aire de la poule.

Aide :

- L'abscisse des points de la queue est $x_A - 2$.
- C'est horrible, mais il faudra découper la poule en morceaux afin de travailler sur les intervalles adéquats !
- Python accepte des tests tels que : `-4 < x < -2` ou `f(x) < y < g(x)`
- Vous pouvez (devez ?) adapter le programme vu début décembre.



Partie D – Aire de la poule

Dans cette partie, on cherche à calculer l'aire de la poule à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.
Le programme (à envoyer par mail) doit afficher une image de la poule et doit donner l'aire de la poule.

Aide :

- L'abscisse des points de la queue est $x_A - 2$.
- C'est horrible, mais il faudra découper la poule en morceaux afin de travailler sur les intervalles adéquats !
- Python accepte des tests tels que : `-4 < x < -2` ou `f(x) < y < g(x)`
- Vous pouvez (devez ?) adapter le programme vu début décembre.