C02

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — La triste vie des lutins du Père Noël *10 points*

Au premier janvier 2020, l'entreprise du Père Noël employait 1 200 lutins dans son usine de jouets.

Il s'est aperçu que chaque année 20% disparaissent (morts frigorifiés, suite à rencontre malheureuse avec un ours, épuisement...), il est donc obligé d'en recruter 150 chaque premier janvier.

Pour tout entier naturel n, on note L_n le nombre de lutins employés au premier janvier de l'année $(2020+n)$. On a donc $L_0 = 1\,200$.

1. Justifier que $L_1 = 1110$, puis calculer les valeurs de L_2 et L_3 arrondies à l'entier.

baisse de 20%, donc coefficient multiplicateur : $\left(1-\dfrac{20}{100}\right)$.

2. Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = 0{,}8x+150$ et $y = 0{,}6x+300$ sont représentées dans le graphique.

a) Associer son équation à chacune (en justifiant) et écrire leur nom sur le graphique.

utiliser l'ordonnée à l'origine

b) Utiliser l'une de ces droites afin de déterminer le sens de variation et la limite de la suite (L_n) avec la précision permise par le graphique.

3. Soit la suite (ℓ_n) définie pour tout entier n par $\ell_n = L_n - 750$

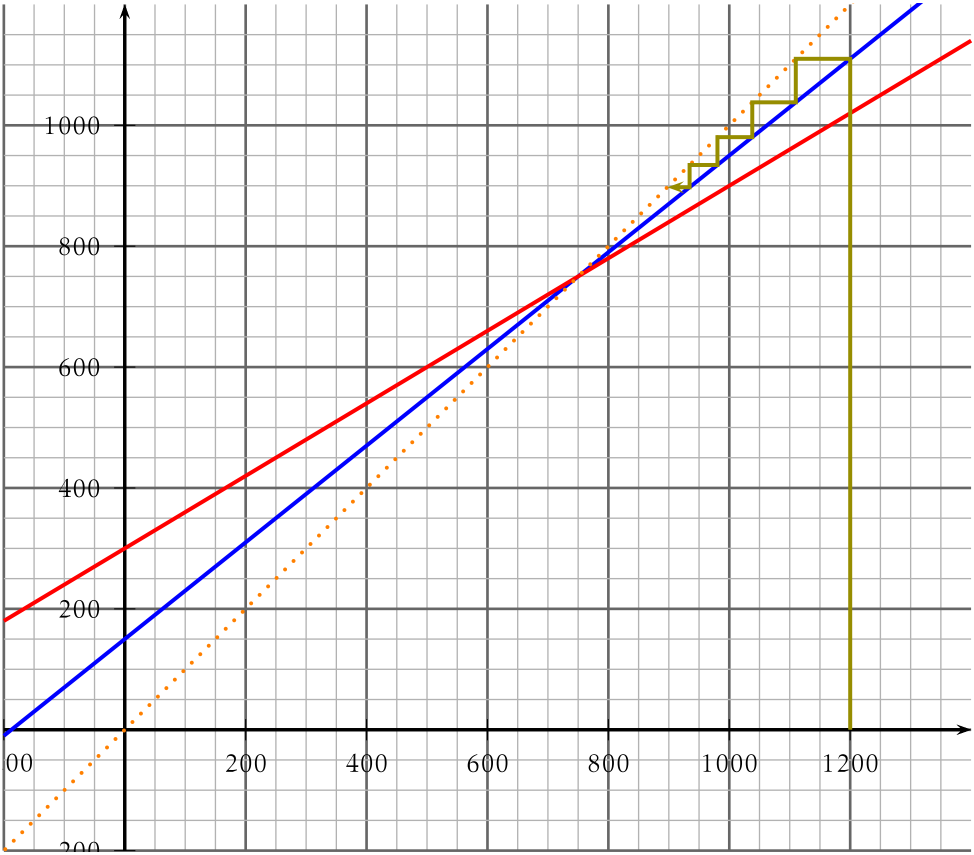
a) Vérifier que $\ell_{n+1} = \alpha \times \ell_n$ (déterminer le réel α).
Aide : écrire $\ell_{n+1} = L_{n+1} - 750$, puis remplacer L_{n+1} par son expression en fonction de L_n et finir en factorisant l'expression obtenue.

b) En déduire la nature de la suite (ℓ_n) puis donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$\ell_{n+1} = \alpha\ell_n$ c'est donc une suite géométrique de raison $\alpha \in]0;1[$, donc elle converge vers 0.

c) En déduire la limite de (L_n) en $+\infty$ et interpréter dans le contexte.

$\ell_n = \mathrm{L}_n - 750 \Leftrightarrow \mathrm{L}_n = \ell_n + 750$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{L}_n = 750$.
Au fil des ans, le nombre de lutins se stabilisera à 750.



Exercice 2 — L'exploitation des lutins du Père Noël *10 points*

La fonction f définie sur $[6\,;21]$ représente l'investissement des lutins dans la confection des jouets en fonction de l'heure de la journée entre 6 heures du matin et 21 heures (ce sont des supers travailleurs !)

$$f(x) = (2x - 12)\,\mathrm{e}^{1{,}8-0{,}25x}$$

1. Tracer sur votre copie l'allure de cette fonction à l'aide de la représentation obtenue sur votre calculatrice.

2. Donner l'expression de la fonction dérivée sous forme $f'(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$.

$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$
posons $u(x) = ax+b$ donc $u'(x) = a$
et $v(x) = \mathrm{e}^{mx+p}$, donc $v'(x) = m\,\mathrm{e}^{mx+p}$.
donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\,\mathrm{e}^{mx+p} + (ax+b) \times m\,\mathrm{e}^{mx+p} \\ &= (amx + mb + a)\,\mathrm{e}^{mx+p} \end{aligned}$$

3. Justifier le signe de $f'(x)$ sur $[6\,;21]$.

exponentielle de « n'importe quelle expression » est toujours strictement positive, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(amx + mb + a)$.
C'est une fonction affine de coefficient directeur am et qui s'annule en $x = -\dfrac{mb+a}{am}$

4. Construire le tableau de variations de la fonction f.
5. En déduire à quel moment de la journée (à la minute près) les lutins sont le plus productifs.

C02

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — La triste vie des lutins du Père Noël *10 points*

Au premier janvier 2020, l'entreprise du Père Noël employait 400 lutins dans son usine de jouets.

Il s'est aperçu que chaque année 40% disparaissent (morts frigorifiés, suite à rencontre malheureuse avec un ours, épuisement...), il est donc obligé d'en recruter 300 chaque premier janvier.

Pour tout entier naturel n, on note L_n le nombre de lutins employés au premier janvier de l'année $(2020+n)$. On a donc $L_0 = 400$.

1. Justifier que $L_1 = 540$, puis calculer les valeurs de L_2 et L_3 arrondies à l'entier.

baisse de 40 %, donc coefficient multiplicateur : $\left(1 - \dfrac{40}{100}\right)$.

2. Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = 0{,}8x + 150$ et $y = 0{,}6x + 300$ sont représentées dans le graphique.

a) Associer son équation à chacune (en justifiant) et écrire leur nom sur le graphique.

utiliser l'ordonnée à l'origine

b) Utiliser l'une de ces droites afin de déterminer le sens de variation et la limite de la suite (L_n) avec la précision permise par le graphique.

3. Soit la suite (ℓ_n) définie pour tout entier n par $\ell_n = L_n - 750$

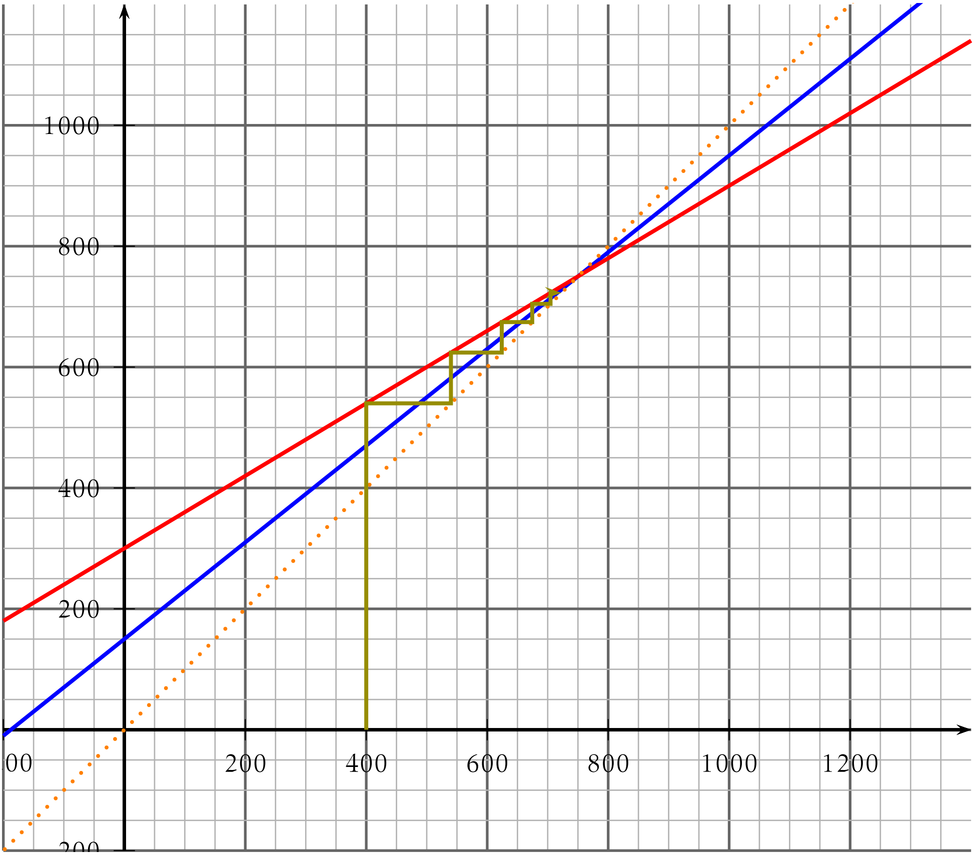
a) Vérifier que $\ell_{n+1} = \alpha \times \ell_n$ (déterminer le réel α).
Aide : écrire $\ell_{n+1} = L_{n+1} - 750$, puis remplacer L_{n+1} par son expression en fonction de L_n et finir en factorisant l'expression obtenue.

b) En déduire la nature de la suite (ℓ_n) puis donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$\ell_{n+1} = \alpha\ell_n$ c'est donc une suite géométrique de raison $\alpha \in]0;1[$, donc elle converge vers 0.

c) En déduire la limite de (L_n) en $+\infty$ et interpréter dans le contexte.

$\ell_n = \mathrm{L}_n - 750 \Leftrightarrow \mathrm{L}_n = \ell_n + 750$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{L}_n = 750$.
Au fil des ans, le nombre de lutins se stabilisera à 750.



Exercice 2 — L'exploitation des lutins du Père Noël *10 points*

La fonction f définie sur $[6\,;21]$ représente l'investissement des lutins dans la confection des jouets en fonction de l'heure de la journée entre 6 heures du matin et 21 heures (ce sont des supers travailleurs !)

$$f(x) = (2{,}5x - 15)\,\mathrm{e}^{1{,}5-0{,}2x}$$

1. Tracer sur votre copie l'allure de cette fonction à l'aide de la représentation obtenue sur votre calculatrice.

2. Donner l'expression de la fonction dérivée sous forme $f'(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$.

$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$
posons $u(x) = ax+b$ donc $u'(x) = a$
et $v(x) = \mathrm{e}^{mx+p}$, donc $v'(x) = m\,\mathrm{e}^{mx+p}$.
donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\,\mathrm{e}^{mx+p} + (ax+b)\times m\,\mathrm{e}^{mx+p} \\ &= (amx+mb+a)\,\mathrm{e}^{mx+p} \end{aligned}$$

3. Justifier le signe de $f'(x)$ sur $[6\,;21]$.

exponentielle de « n'importe quelle expression » est toujours strictement positive, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(amx+mb+a)$.
C'est une fonction affine de coefficient directeur am et qui s'annule en $x = -\dfrac{mb+a}{am}$

4. Construire le tableau de variations de la fonction f.
5. En déduire à quel moment de la journée (à la minute près) les lutins sont le plus productifs.

C02

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — La triste vie des lutins du Père Noël *10 points*

Au premier janvier 2020, l'entreprise du Père Noël employait 1 200 lutins dans son usine de jouets.

Il s'est aperçu que chaque année 40 % disparaissent (morts frigorifiés, suite à rencontre malheureuse avec un ours, épuisement...), il est donc obligé d'en recruter 300 chaque premier janvier.

Pour tout entier naturel n, on note L_n le nombre de lutins employés au premier janvier de l'année $(2020+n)$. On a donc $L_0 = 1\,200$.

1. Justifier que $L_1 = 1020$, puis calculer les valeurs de L_2 et L_3 arrondies à l'entier.

baisse de 40 %, donc coefficient multiplicateur : $\left(1 - \dfrac{40}{100}\right)$.

2. Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = 0{,}8x + 150$ et $y = 0{,}6x + 300$ sont représentées dans le graphique.

a) Associer son équation à chacune (en justifiant) et écrire leur nom sur le graphique.

utiliser l'ordonnée à l'origine

b) Utiliser l'une de ces droites afin de déterminer le sens de variation et la limite de la suite (L_n) avec la précision permise par le graphique.

3. Soit la suite (ℓ_n) définie pour tout entier n par $\ell_n = L_n - 750$

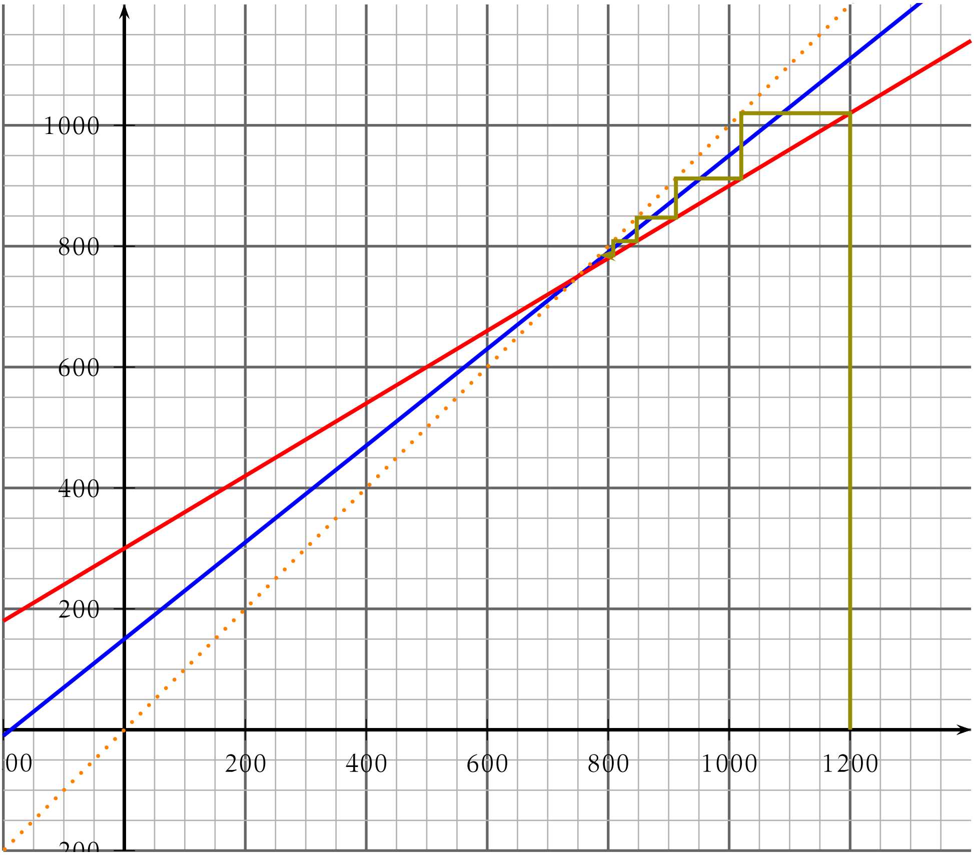
a) Vérifier que $\ell_{n+1} = \alpha \times \ell_n$ (déterminer le réel α).
Aide : écrire $\ell_{n+1} = L_{n+1} - 750$, puis remplacer L_{n+1} par son expression en fonction de L_n et finir en factorisant l'expression obtenue.

b) En déduire la nature de la suite (ℓ_n) puis donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$\ell_{n+1} = \alpha\ell_n$ c'est donc une suite géométrique de raison $\alpha \in \,]0\,;1[$, donc elle converge vers 0.

c) En déduire la limite de (L_n) en $+\infty$ et interpréter dans le contexte.

$\ell_n = L_n - 750 \Leftrightarrow L_n = \ell_n + 750$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 750$.
Au fil des ans, le nombre de lutins se stabilisera à 750.



Exercice 2 — L'exploitation des lutins du Père Noël *10 points*

La fonction f définie sur $[6;21]$ représente l'investissement des lutins dans la confection des jouets en fonction de l'heure de la journée entre 6 heures du matin et 21 heures (ce sont des supers travailleurs !)

$$f(x) = (3x - 18)\,\mathrm{e}^{1,5-0,25x}$$

1. Tracer sur votre copie l'allure de cette fonction à l'aide de la représentation obtenue sur votre calculatrice.

2. Donner l'expression de la fonction dérivée sous forme $f'(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$.

$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$
posons $u(x) = ax+b$ donc $u'(x) = a$
et $v(x) = \mathrm{e}^{mx+p}$, donc $v'(x) = m\,\mathrm{e}^{mx+p}$.
donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\,\mathrm{e}^{mx+p} + (ax+b)\times m\,\mathrm{e}^{mx+p} \\ &= (amx+mb+a)\,\mathrm{e}^{mx+p} \end{aligned}$$

3. Justifier le signe de $f'(x)$ sur $[6\,;21]$.

exponentielle de « n'importe quelle expression » est toujours strictement positive, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(amx+mb+a)$.
C'est une fonction affine de coefficient directeur am et qui s'annule en $x = -\dfrac{mb+a}{am}$

4. Construire le tableau de variations de la fonction f.
5. En déduire à quel moment de la journée (à la minute près) les lutins sont le plus productifs.

C02

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — La triste vie des lutins du Père Noël *10 points*

Au premier janvier 2020, l'entreprise du Père Noël employait 400 lutins dans son usine de jouets.

Il s'est aperçu que chaque année 20 % disparaissent (morts frigorifiés, suite à rencontre malheureuse avec un ours, épuisement...), il est donc obligé d'en recruter 150 chaque premier janvier.

Pour tout entier naturel n, on note L_n le nombre de lutins employés au premier janvier de l'année $(2020 + n)$. On a donc $L_0 = 400$.

1. Justifier que $L_1 = 470$, puis calculer les valeurs de L_2 et L_3 arrondies à l'entier.

baisse de 20 %, donc coefficient multiplicateur : $\left(1 - \dfrac{20}{100}\right)$.

2. Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = 0{,}8x + 150$ et $y = 0{,}6x + 300$ sont représentées dans le graphique.

a) Associer son équation à chacune (en justifiant) et écrire leur nom sur le graphique.

utiliser l'ordonnée à l'origine

b) Utiliser l'une de ces droites afin de déterminer le sens de variation et la limite de la suite (L_n) avec la précision permise par le graphique.

3. Soit la suite (ℓ_n) définie pour tout entier n par $\ell_n = L_n - 750$

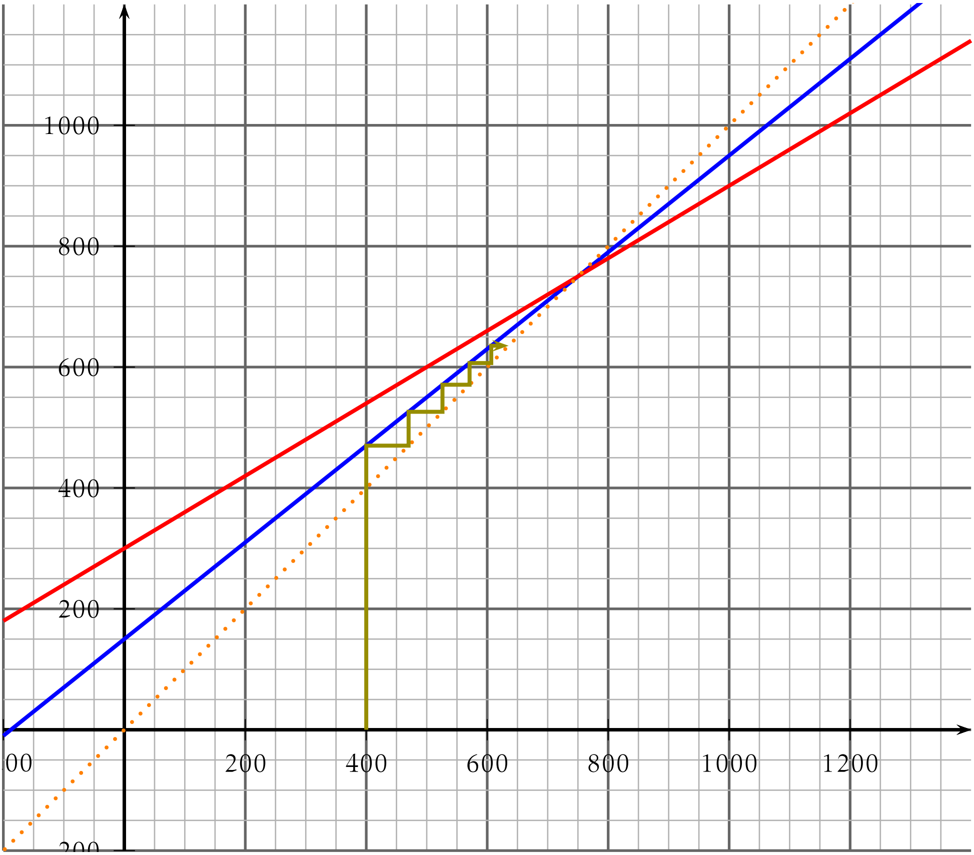
a) Vérifier que $\ell_{n+1} = \alpha \times \ell_n$ (déterminer le réel α).
Aide : écrire $\ell_{n+1} = L_{n+1} - 750$, puis remplacer L_{n+1} par son expression en fonction de L_n et finir en factorisant l'expression obtenue.

b) En déduire la nature de la suite (ℓ_n) puis donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$\ell_{n+1} = \alpha\ell_n$ c'est donc une suite géométrique de raison $\alpha \in]0;1[$, donc elle converge vers 0.

c) En déduire la limite de (L_n) en $+\infty$ et interpréter dans le contexte.

$\ell_n = L_n - 750 \Leftrightarrow L_n = \ell_n + 750$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 750$.
Au fil des ans, le nombre de lutins se stabilisera à 750.



Exercice 2 — L'exploitation des lutins du Père Noël *10 points*

La fonction f définie sur $[6\,;21]$ représente l'investissement des lutins dans la confection des jouets en fonction de l'heure de la journée entre 6 heures du matin et 21 heures (ce sont des supers travailleurs !)

$$f(x) = (2x-12)\,\mathrm{e}^{1,75-0,2x}$$

1. Tracer sur votre copie l'allure de cette fonction à l'aide de la représentation obtenue sur votre calculatrice.

2. Donner l'expression de la fonction dérivée sous forme $f'(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$.

$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{mx+p}$
posons $u(x) = ax+b$ donc $u'(x) = a$
et $v(x) = \mathrm{e}^{mx+p}$, donc $v'(x) = m\,\mathrm{e}^{mx+p}$.
donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\,\mathrm{e}^{mx+p} + (ax+b)\times m\,\mathrm{e}^{mx+p} \\ &= (amx+mb+a)\,\mathrm{e}^{mx+p} \end{aligned}$$

3. Justifier le signe de $f'(x)$ sur $[6\,;21]$.

exponentielle de « n'importe quelle expression » est toujours strictement positive, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(amx+mb+a)$.
C'est une fonction affine de coefficient directeur am et qui s'annule en $x = -\dfrac{mb+a}{am}$

4. Construire le tableau de variations de la fonction f.
5. En déduire à quel moment de la journée (à la minute près) les lutins sont le plus productifs.