A Co4

NOM, Prénom ....

J'ai un ami physicien qui se déplace en vélo à assistance électrique (VAE)...

Exercice 1 — Vélo

12 points

L'ami physicien roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est la solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0; c'est à dire $10y'(t) + y(t) = 30$ et $v(0) = 0$.

1. Déterminer la fonction v, solution de cette équation différentielle.

$$\begin{aligned} & 10v'(t) + v(t) = 30 \\ \Leftrightarrow & 10v'(t) = -v(t) + 30 \\ \Leftrightarrow & v'(t) = -0{,}1v(t) + \frac{30}{10} \end{aligned}$$

d'après le cours : $v(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - \dfrac{\frac{30}{10}}{-0{,}1} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 30$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or il faut

$$\begin{aligned} & v(0) = 0 \\ \Leftrightarrow & k\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0} + 30 = 0 \\ \Leftrightarrow & k\,\mathrm{e}^{0} + 30 = 0 \\ \Leftrightarrow & k = -30 \end{aligned}$$

Donc $v(t) = -30\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 30$

2. a) Vérifier, en détaillant les calculs, que $v'(t) = 3\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

dérivée de la fonction v avec $(\mathrm{e}^{mx+p})' = m\,\mathrm{e}^{mx+p}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.

pour tout t dans $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$, donc $v'(t) < 0$: on en déduit que v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction v.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 30$.

d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Cette limite est la vitesse maximale qu'il ne pourrait approcher... $3,6 \times 30\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$!!

3. La fonction d, est la primitive de v vérifiant $d(0) = 0$. Déterminer l'expression de d.

$v(t) = -30\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 30$, donc une primitive est :

$\mathrm{V}(t) = 10 \times 30\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 30t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$.

On veut

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}(0) = 0\\
\Leftrightarrow\,& 10 \times 30\,\mathrm{e}^{-0,1\times 0} + 30 \times 0 + k = 0\\
\Leftrightarrow\,& 10 \times 30 + k = 0\\
\Leftrightarrow\,& k = -10 \times 30
\end{aligned}$$

Donc $d(t) = 10 \times 30\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 30t - 10 \times 30$

Exercice 2 — Électrique

8 points

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts).
On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ;
on considère l'équation différentielle : $y' + 10y = 0,01$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 10$.

1. Donner l'expression de q : c'est la solution de l'équation différentielle qui vérifie $q(0) = 0$.

   $y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R} \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{R}$

   donc $q(t) = k\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

   on veut $q(0) = 0 \Leftrightarrow k\,e^{-\frac{1}{RC}\times 0} + EC = 0 \Leftrightarrow k = -EC$

   donc $q(t) = -EC\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

2. L'intensité i du courant (exprimée en ampères) est telle que $i(t) = q'(t)$.
   Déterminer l'expression de $i(t)$.

   $i(t) = -EC \times \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$.

3. L'énergie W (en joules) dissipée dans le conducteur ohmique depuis la fermeture de l'interrupteur, est donnée par $W(t) = 1\,000 \times I(t)$, avec $I(t)$, la primitive de $(i(t))^2$ qui s'annule en 0.
   En admettant que $(i(t))^2 = 0{,}000\,1\,e^{-20t}$, déterminer l'expression de $W(t)$.

   $W(t) = -5 \cdot 10^{-3}\,e^{-20t} + 5 \cdot 10^{-3}$

Nos amis physiciens : *https://mesmanuels.fr/demo/9782016290057/*

B

C04

NOM, Prénom ....

J'ai un ami physicien qui se déplace en vélo à assistance électrique (VAE)...

Exercice 1 — Vélo

12 points

L'ami physicien roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est la solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0; c'est à dire $10y'(t)+y(t)=25$ et $v(0)=0$.

1. Déterminer la fonction v, solution de cette équation différentielle.

$$\begin{aligned} & 10v'(t)+v(t)=25 \\ \Leftrightarrow & 10v'(t)=-v(t)+25 \\ \Leftrightarrow & v'(t)=-0{,}1v(t)+\frac{25}{10} \end{aligned}$$

d'après le cours : $v(t)=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}-\dfrac{\frac{25}{10}}{-0{,}1}=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+25$ avec $k\in\mathbb{R}$.
Or il faut

$$\begin{aligned} & v(0)=0 \\ \Leftrightarrow & k\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times0}+25=0 \\ \Leftrightarrow & k\,\mathrm{e}^{0}+25=0 \\ \Leftrightarrow & k=-25 \end{aligned}$$

Donc $v(t)=-25\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+25$

2. a) Vérifier, en détaillant les calculs, que $v'(t)=2{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

dérivée de la fonction v avec $(\mathrm{e}^{mx+p})'=m\,\mathrm{e}^{mx+p}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0;+\infty[$.

pour tout t dans $[0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$, donc $v'(t) < 0$: on en déduit que v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction v.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 25$.

d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Cette limite est la vitesse maximale qu'il ne pourrait approcher... $3{,}6 \times 25\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$!!

3. La fonction d, est la primitive de v vérifiant $d(0) = 0$. Déterminer l'expression de d.

$v(t) = -25\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 25$, donc une primitive est :

$\mathrm{V}(t) = 10 \times 25\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 25t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$.

On veut

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 10 \times 25\,\mathrm{e}^{-0,1\times 0} + 25 \times 0 + k = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 10 \times 25 + k = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k = -10 \times 25 \end{aligned}$$

Donc $d(t) = 10 \times 25\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 25t - 10 \times 25$

Exercice 2 — Électrique

8 points

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts).
On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ;
on considère l'équation différentielle : $y' + 10y = 0{,}03$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 30$.

1. Donner l'expression de q : c'est la solution de l'équation différentielle qui vérifie $q(0) = 0$.

$y' + \dfrac{1}{RC} y = \dfrac{E}{R} \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{RC} y + \dfrac{E}{R}$

donc $q(t) = k\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

on veut $q(0) = 0 \Leftrightarrow k\,e^{-\frac{1}{RC}\times 0} + EC = 0 \Leftrightarrow k = -EC$

donc $q(t) = -EC\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

2. L'intensité i du courant (exprimée en ampères) est telle que $i(t) = q'(t)$.
Déterminer l'expression de $i(t)$.

$i(t) = -EC \times \left(-\dfrac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \dfrac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$.

3. L'énergie W (en joules) dissipée dans le conducteur ohmique depuis la fermeture de l'interrupteur, est donnée par $W(t) = 1\,000 \times I(t)$, avec $I(t)$, la primitive de $(i(t))^2$ qui s'annule en 0.
En admettant que $(i(t))^2 = 0{,}000\,9\,e^{-20t}$, déterminer l'expression de $W(t)$.

$W(t) = -45 \cdot 10^{-3}\,e^{-20t} + 45 \cdot 10^{-3}$

Nos amis physiciens : *https://mesmanuels.fr/demo/9782016290057/*

C Co4

NOM, Prénom ....

J'ai un ami physicien qui se déplace en vélo à assistance électrique (VAE)...

Exercice 1 — Vélo

12 points

L'ami physicien roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est la solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0; c'est à dire $10y'(t) + y(t) = 20$ et $v(0) = 0$.

1. Déterminer la fonction v, solution de cette équation différentielle.

$$\begin{aligned}
&10v'(t)+v(t)=20\\
\Leftrightarrow &10v'(t)=-v(t)+20\\
\Leftrightarrow &v'(t)=-0{,}1v(t)+\frac{20}{10}
\end{aligned}$$

d'après le cours : $v(t)=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}-\dfrac{\frac{20}{10}}{-0{,}1}=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+20$ avec $k\in\mathbb{R}$.
Or il faut

$$\begin{aligned}
&v(0)=0\\
\Leftrightarrow &k\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0}+20=0\\
\Leftrightarrow &k\,\mathrm{e}^{0}+20=0\\
\Leftrightarrow &k=-20
\end{aligned}$$

Donc $v(t)=-20\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+20$

2. a) Vérifier, en détaillant les calculs, que $v'(t)=2\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

dérivée de la fonction v avec $(\mathrm{e}^{mx+p})'=m\,\mathrm{e}^{mx+p}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.

pour tout t dans $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$, donc $v'(t) < 0$: on en déduit que v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction v.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 20$.

d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Cette limite est la vitesse maximale qu'il ne pourrait approcher... $3,6 \times 20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$!!

3. La fonction d, est la primitive de v vérifiant $d(0) = 0$. Déterminer l'expression de d.

$v(t) = -20\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 20$, donc une primitive est :

$\mathrm{V}(t) = 10 \times 20\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 20t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$.

On veut

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\, & 10 \times 20\,\mathrm{e}^{-0,1\times 0} + 20 \times 0 + k = 0 \\ \Leftrightarrow\, & 10 \times 20 + k = 0 \\ \Leftrightarrow\, & k = -10 \times 20 \end{aligned}$$

Donc $d(t) = 10 \times 20\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 20t - 10 \times 20$

Exercice 2 — Électrique *8 points*

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts).

On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ;

on considère l'équation différentielle : $y' + 10y = 0,02$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 20$.

1. Donner l'expression de q : c'est la solution de l'équation différentielle qui vérifie $q(0) = 0$.

   $y' + \dfrac{1}{RC}y = \dfrac{E}{R} \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{RC}y + \dfrac{E}{R}$
   donc $q(t) = k\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$
   on veut $q(0) = 0 \Leftrightarrow k\,e^{-\frac{1}{RC}\times 0} + EC = 0 \Leftrightarrow k = -EC$
   donc $q(t) = -EC\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

2. L'intensité i du courant (exprimée en ampères) est telle que $i(t) = q'(t)$.
   Déterminer l'expression de $i(t)$.

   $i(t) = -EC \times \left(-\dfrac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \dfrac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$.

3. L'énergie W (en joules) dissipée dans le conducteur ohmique depuis la fermeture de l'interrupteur, est donnée par $W(t) = 1\,000 \times I(t)$, avec $I(t)$, la primitive de $(i(t))^2$ qui s'annule en 0.
   En admettant que $(i(t))^2 = 0{,}000\,4\,e^{-20t}$, déterminer l'expression de $W(t)$.

   $W(t) = -20 \cdot 10^{-3}\,e^{-20t} + 20 \cdot 10^{-3}$

Nos amis physiciens : *https://mesmanuels.fr/demo/9782016290057/*

D

C04

NOM, Prénom ....

J'ai un ami physicien qui se déplace en vélo à assistance électrique (VAE)...

Exercice 1 — Vélo

12 points

L'ami physicien roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est la solution de l'équation différentielle qui s'annule en 0; c'est à dire $10y'(t) + y(t) = 35$ et $v(0) = 0$.

1. Déterminer la fonction v, solution de cette équation différentielle.

$$\begin{aligned} &10v'(t)+v(t)=35\\ \Leftrightarrow &10v'(t)=-v(t)+35\\ \Leftrightarrow &v'(t)=-0{,}1v(t)+\frac{35}{10}\end{aligned}$$

d'après le cours : $v(t)=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}-\dfrac{\frac{35}{10}}{-0{,}1}=k\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+35$ avec $k\in\mathbb{R}$.
Or il faut

$$\begin{aligned} &v(0)=0\\ \Leftrightarrow &k\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0}+35=0\\ \Leftrightarrow &k\,\mathrm{e}^{0}+35=0\\ \Leftrightarrow &k=-35\end{aligned}$$

Donc $v(t)=-35\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}+35$

2. a) Vérifier, en détaillant les calculs, que $v'(t)=3{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

dérivée de la fonction v avec $(\mathrm{e}^{mx+p})'=m\,\mathrm{e}^{mx+p}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0;+\infty[$.

pour tout t dans $[0;+\infty[, e^{-0,1t} > 0$, donc $v'(t) < 0$: on en déduit que v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction v.

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 35$.

d) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Cette limite est la vitesse maximale qu'il ne pourrait approcher... $3,6 \times 35\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$!!

3. La fonction d, est la primitive de v vérifiant $d(0) = 0$. Déterminer l'expression de d.

$v(t) = -35\,e^{-0,1t} + 35$, donc une primitive est :

$V(t) = 10 \times 35\,e^{-0,1t} + 35t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$.

On veut

$$\begin{aligned} & V(0) = 0 \\ \Leftrightarrow & 10 \times 35\,e^{-0,1\times 0} + 35 \times 0 + k = 0 \\ \Leftrightarrow & 10 \times 35 + k = 0 \\ \Leftrightarrow & k = -10 \times 35 \end{aligned}$$

Donc $d(t) = 10 \times 35\,e^{-0,1t} + 35t - 10 \times 35$

Exercice 2 — Électrique *8 points*

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts).
On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes);
on considère l'équation différentielle : $y' + 10y = 0,04$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 40$.

1. Donner l'expression de q : c'est la solution de l'équation différentielle qui vérifie $q(0) = 0$.

   $y' + \dfrac{1}{RC}y = \dfrac{E}{R} \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{RC}y + \dfrac{E}{R}$

   donc $q(t) = k\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

   on veut $q(0) = 0 \Leftrightarrow k\,e^{-\frac{1}{RC}\times 0} + EC = 0 \Leftrightarrow k = -EC$

   donc $q(t) = -EC\,e^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

2. L'intensité i du courant (exprimée en ampères) est telle que $i(t) = q'(t)$. Déterminer l'expression de $i(t)$.

   $i(t) = -EC \times \left(-\dfrac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \dfrac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$.

3. L'énergie W (en joules) dissipée dans le conducteur ohmique depuis la fermeture de l'interrupteur, est donnée par $W(t) = 1\,000 \times I(t)$, avec $I(t)$, la primitive de $(i(t))^2$ qui s'annule en 0.
   En admettant que $(i(t))^2 = 0{,}001\,6\,e^{-20t}$, déterminer l'expression de $W(t)$.

   $W(t) = -80 \cdot 10^{-3}\,e^{-20t} + 80 \cdot 10^{-3}$

Nos amis physiciens : *https://mesmanuels.fr/demo/9782016290057/*