A C05

NOM, Prénom ....

Remarque : note sur 20, mais possibilité d'avoir 24/20 !

Exercice 1 — Calculs

4 points

a) $4\,\mathrm{e}^{x} - 2 > 0$ (avec $x \in \mathbb{R}$) **b)** $1{,}2^{n} \geqslant 200$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

a) de la forme $a\,\mathrm{e}^{x} - b > 0$ avec $a > 0$ et $b > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} > \frac{b}{a} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

donc $x \in \left]\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$

b) de la forme $a^{n} \geqslant b$ (avec $a > 1$ et $b > 1$) $\Leftrightarrow n\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Exercice 2 — Poisson d'Avril

20 points

Le poisson est construit à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = -2x^{2} + \ln(8x+1) + 2$$

et de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ et de la droite d'équation $x = 1{,}8$.

1. Donner (en justifiant) l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

f est de la forme $f(x) = -ax^{2} + \ln(4ax+1) + 2$ (avec $a > 0$) ; il faut que le logarithme soit défini, donc il faut $4ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4a}$ ($a > 0$).

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\frac{1}{4a}\,;+\infty\right[$

2. Tracer sur le graphique la représentation de la fonction g sur D_f et la droite d'équation $x = 1{,}8$.

3. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

$f(x) = -ax^{2} + \ln(4ax+1) + 2$ donc $f'(x) = -2ax + \frac{4a}{4ax+1} = \frac{-8a^{2}x^{2} - 2ax + 4a}{4ax+1}$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f.

On sait que $4ax+1>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-8a^2x^2-2ax+4a$.
deux racines : $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32a}}{8a}$; mais seule la racine positive est dans D_f.

5. Compléter le tableau de variations de f et donner la valeur approchée au centième de son maximum.

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

6. Calculer une valeur approchée de $f(1{,}8)$.
En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $[0{,}6\,;1{,}8]$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième de α.

f est continue et strictement décroissante sur $[0{,}6\,;1{,}8]$ et elle change de signe : donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[0{,}6\,;1{,}8]$ tel que $f(\alpha)=0$.

7. Soit H, la fonction définie sur D_f par : $\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{8}\right)\ln(8x+1)-x-\dfrac{1}{8}$.
Donner l'expression de $\mathrm{H}'(x)$.

$\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1)-x-\dfrac{1}{4a}$;

donc $\mathrm{H}'(x)=1\times\ln(4ax+1)+\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\times\dfrac{4a}{4ax+1}-1$

$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)+\dfrac{4ax+1}{4ax+1}-1$

$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)$

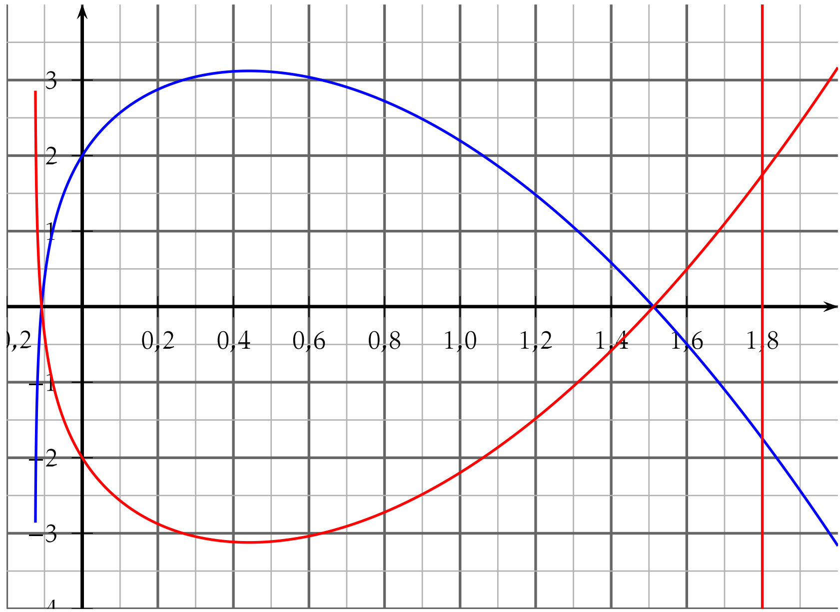
8. En déduire qu'une primitive de f sur D_f est :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{-2}{3}x^3+\left(x+\frac{1}{8}\right)\ln(8x+1)+x-\frac{1}{8}$$

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc une primitive est $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \mathrm{H}(x) + 2x$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-a}{3}x^3 + \left(x + \frac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) - x - \frac{1}{4a} + 2x$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-a}{3}x^3 + \left(x + \frac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) + x - \frac{1}{4a}$$



B — C05

NOM, Prénom ....

Remarque : note sur 20, mais possibilité d'avoir 24/20 !

Exercice 1 — Calculs *4 points*

a) $4\,\mathrm{e}^x - 8 > 0$ (avec $x \in \mathbb{R}$) **b)** $1{,}15^n \geqslant 100$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

a) de la forme $a\,\mathrm{e}^x - b > 0$ avec $a > 0$ et $b > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

donc $x \in \left]\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$

b) de la forme $a^n \geqslant b$ (avec $a > 1$ et $b > 1$) $\Leftrightarrow n\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Exercice 2 — Poisson d'Avril *20 points*

Le poisson est construit à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = -1{,}5x^2 + \ln(6x+1) + 2$$

et de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ et de la droite d'équation $x = 1{,}9$.

1. Donner (en justifiant) l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

f est de la forme $f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ (avec $a > 0$) ; il faut que le logarithme soit défini, donc il faut $4ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4a}$ $(a > 0)$.

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\dfrac{1}{4a}\,;+\infty\right[$

2. Tracer sur le graphique la représentation de la fonction g sur D_f et la droite d'équation $x = 1{,}9$.

3. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc $f'(x) = -2ax + \dfrac{4a}{4ax+1} = \dfrac{-8a^2x^2 - 2ax + 4a}{4ax+1}$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f.

On sait que $4ax+1>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-8a^2x^2-2ax+4a$.
deux racines : $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32a}}{8a}$; mais seule la racine positive est dans D_f.

5. Compléter le tableau de variations de f et donner la valeur approchée au centième de son maximum.

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

6. Calculer une valeur approchée de $f(1{,}8)$.
En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $[0{,}6\,;1{,}8]$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième de α.
f est continue et strictement décroissante sur $[0{,}6\,;1{,}8]$ et elle change de signe : donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[0{,}6\,;1{,}8]$ tel que $f(\alpha)=0$.

7. Soit H, la fonction définie sur D_f par : $\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{6}\right)\ln(6x+1)-x-\dfrac{1}{6}$.
Donner l'expression de $\mathrm{H}'(x)$.
$\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1)-x-\dfrac{1}{4a}$;
donc $\mathrm{H}'(x)=1\times\ln(4ax+1)+\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\times\dfrac{4a}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)+\dfrac{4ax+1}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)$

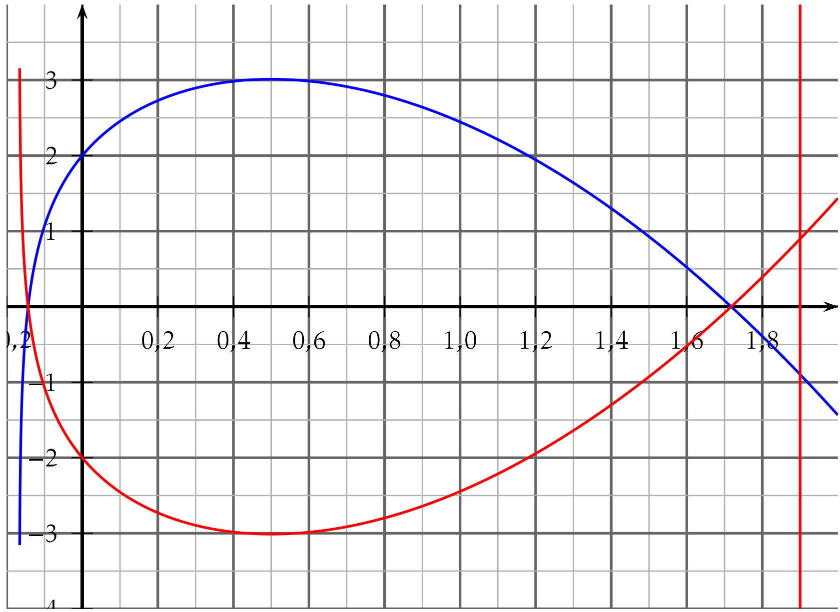
8. En déduire qu'une primitive de f sur D_f est :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{-1{,}5}{3}x^3+\left(x+\frac{1}{6}\right)\ln(6x+1)+x-\frac{1}{6}$$

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc une primitive est $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \mathrm{H}(x) + 2x$

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \left(x + \dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) - x - \dfrac{1}{4a} + 2x$

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \left(x + \dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) + x - \dfrac{1}{4a}$



C Co5

NOM, Prénom ....

Remarque : note sur 20, mais possibilité d'avoir 24/20 !

Exercice 1 — Calculs

4 points

a) $3\,\mathrm{e}^x - 6 > 0$ (avec $x \in \mathbb{R}$) **b)** $1{,}25^n \geqslant 1000$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

a) de la forme $a\,\mathrm{e}^x - b > 0$ avec $a > 0$ et $b > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

donc $x \in \left]\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$

b) de la forme $a^n \geqslant b$ (avec $a > 1$ et $b > 1$) $\Leftrightarrow n\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Exercice 2 — Poisson d'Avril

20 points

Le poisson est construit à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = -3x^2 + \ln(12x+1) + 2$$

et de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ et de la droite d'équation $x = 1{,}6$.

1. Donner (en justifiant) l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

f est de la forme $f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ (avec $a > 0$) ; il faut que le logarithme soit défini, donc il faut $4ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4a}$ ($a > 0$).

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\dfrac{1}{4a}\,;+\infty\right[$

2. Tracer sur le graphique la représentation de la fonction g sur D_f et la droite d'équation $x = 1{,}6$.

3. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc $f'(x) = -2ax + \dfrac{4a}{4ax+1} = \dfrac{-8a^2x^2 - 2ax + 4a}{4ax+1}$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f.

On sait que $4ax+1>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-8a^2x^2-2ax+4a$.
deux racines : $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32a}}{8a}$; mais seule la racine positive est dans D_f.

5. Compléter le tableau de variations de f et donner la valeur approchée au centième de son maximum.

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

6. Calculer une valeur approchée de $f(1{,}8)$.
En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $[0{,}6\,;1{,}8]$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième de α.

f est continue et strictement décroissante sur $[0{,}6\,;1{,}8]$ et elle change de signe : donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[0{,}6\,;1{,}8]$ tel que $f(\alpha)=0$.

7. Soit H, la fonction définie sur D_f par : $\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{12}\right)\ln(12x+1)-x-\dfrac{1}{12}$.
Donner l'expression de $\mathrm{H}'(x)$.

$\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1)-x-\dfrac{1}{4a}$;
donc $\mathrm{H}'(x)=1\times\ln(4ax+1)+\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\times\dfrac{4a}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)+\dfrac{4ax+1}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)$

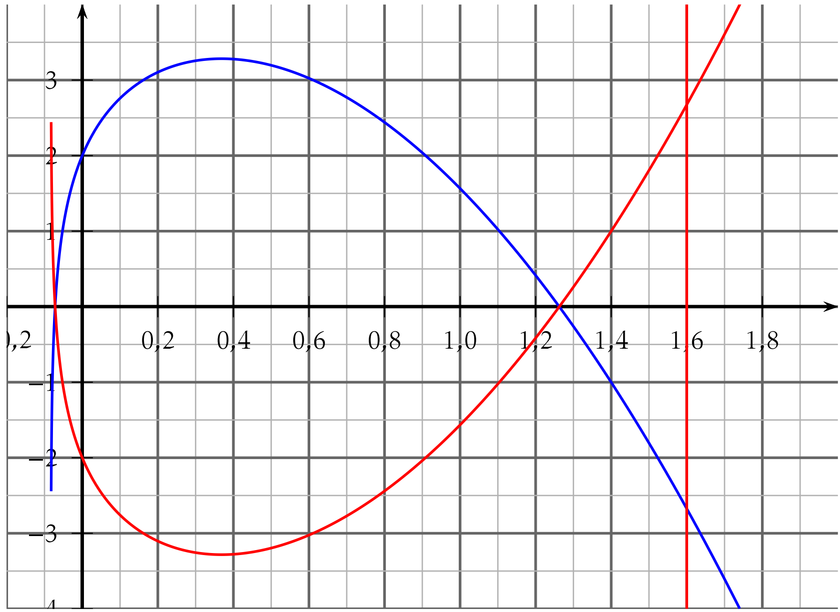
8. En déduire qu'une primitive de f sur D_f est :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{-3}{3}x^3+\left(x+\frac{1}{12}\right)\ln(12x+1)+x-\frac{1}{12}$$

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc une primitive est $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \mathrm{H}(x) + 2x$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-a}{3}x^3 + \left(x + \frac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) - x - \frac{1}{4a} + 2x$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-a}{3}x^3 + \left(x + \frac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) + x - \frac{1}{4a}$$



D C05

NOM, Prénom ....

Remarque : note sur 20, mais possibilité d'avoir 24/20 !

Exercice 1 — Calculs

4 points

a) $6\,\mathrm{e}^x - 3 > 0$ (avec $x \in \mathbb{R}$) **b)** $1{,}1^n \geqslant 30$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

a) de la forme $a\,\mathrm{e}^x - b > 0$ avec $a > 0$ et $b > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

donc $x \in \left]\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$

b) de la forme $a^n \geqslant b$ (avec $a > 1$ et $b > 1$) $\Leftrightarrow n\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Exercice 2 — Poisson d'Avril

20 points

Le poisson est construit à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = -2{,}5x^2 + \ln(10x + 1) + 2$$

et de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ et de la droite d'équation $x = 1{,}7$.

1. Donner (en justifiant) l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

   f est de la forme $f(x) = -ax^2 + \ln(4ax + 1) + 2$ (avec $a > 0$) ; il faut que le logarithme soit défini, donc il faut $4ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4a}$ ($a > 0$).

   Donc la fonction f est définie sur $\left]-\dfrac{1}{4a}\,;+\infty\right[$

2. Tracer sur le graphique la représentation de la fonction g sur D_f et la droite d'équation $x = 1{,}7$.
3. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

   $f(x) = -ax^2 + \ln(4ax + 1) + 2$ donc $f'(x) = -2ax + \dfrac{4a}{4ax + 1} = \dfrac{-8a^2x^2 - 2ax + 4a}{4ax + 1}$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f.

On sait que $4ax+1>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-8a^2x^2-2ax+4a$.
deux racines : $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+32a}}{8a}$; mais seule la racine positive est dans D_f.

5. Compléter le tableau de variations de f et donner la valeur approchée au centième de son maximum.

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

6. Calculer une valeur approchée de $f(1{,}8)$.
En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $[0{,}6\,;1{,}8]$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième de α.

f est continue et strictement décroissante sur $[0{,}6\,;1{,}8]$ et elle change de signe : donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[0{,}6\,;1{,}8]$ tel que $f(\alpha)=0$.

7. Soit H, la fonction définie sur D_f par : $\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{10}\right)\ln(10x+1)-x-\dfrac{1}{10}$.
Donner l'expression de $\mathrm{H}'(x)$.

$\mathrm{H}(x)=\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1)-x-\dfrac{1}{4a}$;
donc $\mathrm{H}'(x)=1\times\ln(4ax+1)+\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)\times\dfrac{4a}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)+\dfrac{4ax+1}{4ax+1}-1$
$\mathrm{H}'(x)=\ln(4ax+1)$

8. En déduire qu'une primitive de f sur D_f est :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{-2{,}5}{3}x^3+\left(x+\frac{1}{10}\right)\ln(10x+1)+x-\frac{1}{10}$$

$f(x) = -ax^2 + \ln(4ax+1) + 2$ donc une primitive est $F(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + H(x) + 2x$

$F(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \left(x + \dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) - x - \dfrac{1}{4a} + 2x$

$F(x) = \dfrac{-a}{3}x^3 + \left(x + \dfrac{1}{4a}\right)\ln(4ax+1) + x - \dfrac{1}{4a}$