A Co6

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Intégrale *4 points*

Calculer, en détaillant, la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} + 2x \,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$, une primitive de f est $\mathrm{F}(x) = \ln(x) + x^2$, donc $\mathrm{I} = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = \ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e}^2 - (\ln(1) + 1) = 1 + \mathrm{e}^2 - (0 + 1) = \mathrm{e}^2$

Exercice 2 — Richesses et inégalités *16 points*

Tintin et le sceptre d'Ottokar (p.18)

Tintin : L'affaire Tournesol (p.47)

Le graphique représente la répartition des revenus pour les habitants de la Syldavie (fonction f) et pour ceux de la Bordurie (fonction h).

Rappels :

- Une courbe de Lorenz est la représentation d'une fonction $\mathcal{L}$ vérifiant :
  - $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\mathcal{L}(1) = 1$
  - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$
  - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$.
- l'indice de Gini (noté $\mathcal{G}$) est le double de l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $y = x$, et la courbe de lorenz sur $[0;1]$, c'est à dire :
  $\mathcal{G} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathcal{L}(x)\,\mathrm{d}x$
  On note $\mathcal{G}_{\mathrm{S}}$ l'indice de Gini associé à la Syldavie et $\mathcal{G}_{\mathrm{B}}$ celui associé à la Bordurie.

Partie A – Graphique

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = 2{,}5x^2 - 4x^3 + 2{,}5x^4$$

1. Tracer la droite d'équation $y = x$ sur le graphique.
2. Donner une valeur approchée de $f(0{,}5)$ et identifier sur le graphique les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ représentations respectives des fonctions f et h.
   (Le graphe en pointillés représente la fonction f'', dérivée seconde de f.)
3. À l'aide d'une lecture graphique, ordonner $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{G}_B$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.
   on obtient un polynôme de degré 3

2. Calculer $f'(0)$. $f'(0) = 0$
3. Le graphe en pointillés est celui de la fonction f'', dérivée seconde de f : c'est une parabole. Lire le signe de $f''(x)$ sur $[0;1]$. D'après le graphique : $f''(x) > 0$.
4. En déduire, en justifiant, le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$, puis les variations de f.
   $f''(x) > 0$ sur $[0;1]$, donc f' est strictement croissante sur $[0;1]$.
   Or $f'(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0;1] : f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

5. Justifier à l'aide des réponses aux questions précédentes, que le graphe de la fonction f est une courbe de Lorenz.
   - vérifier $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (présenter les calculs)
   - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$: justifier convexité (dérivée seconde positive)
   - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$. (graphiquement : $\mathscr{C}_f$ est sous la droite d'équation $y = x$)

6. Calculer $\mathcal{G}_S$ en détaillant les calculs (donner une valeur approchée au centième).
   $\mathcal{G}_S = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
   Il faut trouver une primitive F de f, $\mathcal{G}_S = 1 - 2(\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)) \approx 0{,}33$.

Partie C – Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[0\,;1]$ par :

$$h(x) = \frac{x}{-1+\mathrm{e}^{-3}} \times \left(-1+\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

On admet que $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de la fonction h est une courbe de Lorenz.

1. Démontrer que la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{18(1-\mathrm{e}^{-3})} \times \left(9x^2 + 2(1+3x)\,\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

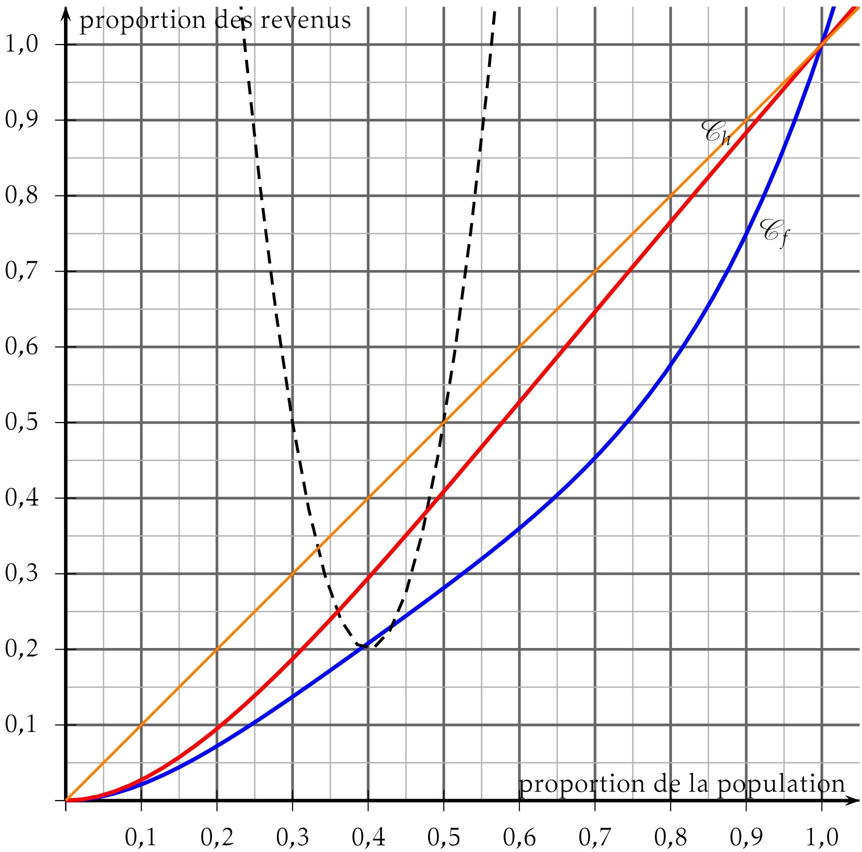
est une primitive de h.

remarquer la constante multiplicative !
H est de la forme $k \times (u(x) + v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b})$ avec

- $u(x)$ une fonction carrée
- $v(x)$ une fonction affine
- e^{ax+b} une fonction composée
- dérivée d'un produit pour $v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

2. Calculer $\mathcal{G}_\mathrm{B}$ en justifiant les calculs (donner une valeur approchée au centième).

$\mathcal{G}_\mathrm{B} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}(0)) = 0{,}135$



proportion des revenus
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mathscr{C}_h$
$\mathscr{C}_f$
proportion de la population
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

B

Co6

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Intégrale

4 points

Calculer, en détaillant, la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} + 2x \,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$, une primitive de f est $\mathrm{F}(x) = \ln(x) + x^2$, donc $\mathrm{I} = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = \ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e}^2 - (\ln(1) + 1) = 1 + \mathrm{e}^2 - (0 + 1) = \mathrm{e}^2$

Exercice 2 — Richesses et inégalités

16 points

Tintin et le sceptre d'Ottokar (p.18)

Tintin : L'affaire Tournesol (p.47)

Le graphique représente la répartition des revenus pour les habitants de la Syldavie (fonction f) et pour ceux de la Bordurie (fonction h).

Rappels :

- Une courbe de Lorenz est la représentation d'une fonction $\mathcal{L}$ vérifiant :
  - $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\mathcal{L}(1) = 1$
  - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$
  - pour tout $x \in [0;1] : f(x) \leqslant x$.
- l'indice de Gini (noté $\mathcal{G}$) est le double de l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $y = x$, et la courbe de lorenz sur $[0;1]$, c'est à dire :

  $\mathcal{G} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathcal{L}(x)\,\mathrm{d}x$

  On note $\mathcal{G}_{\mathrm{S}}$ l'indice de Gini associé à la Syldavie et $\mathcal{G}_{\mathrm{B}}$ celui associé à la Bordurie.

Partie A – Graphique

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3{,}5x^3 + 2{,}5x^4$$

1. Tracer la droite d'équation $y = x$ sur le graphique.
2. Donner une valeur approchée de $f(0{,}5)$ et identifier sur le graphique les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ représentations respectives des fonctions f et h.
   (Le graphe en pointillés représente la fonction f'', dérivée seconde de f.)
3. À l'aide d'une lecture graphique, ordonner $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{G}_B$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.
   on obtient un polynôme de degré 3

2. Calculer $f'(0)$. $f'(0) = 0$
3. Le graphe en pointillés est celui de la fonction f'', dérivée seconde de f : c'est une parabole. Lire le signe de $f''(x)$ sur $[0;1]$. D'après le graphique : $f''(x) > 0$.
4. En déduire, en justifiant, le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$, puis les variations de f.
   $f''(x) > 0$ sur $[0;1]$, donc f' est strictement croissante sur $[0;1]$.
   Or $f'(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

5. Justifier à l'aide des réponses aux questions précédentes, que le graphe de la fonction f est une courbe de Lorenz.
   - vérifier $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (présenter les calculs)
   - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$: justifier convexité (dérivée seconde positive)
   - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$. (graphiquement : $\mathscr{C}_f$ est sous la droite d'équation $y = x$)

6. Calculer $\mathcal{G}_S$ en détaillant les calculs (donner une valeur approchée au centième).
   $\mathcal{G}_S = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
   Il faut trouver une primitive F de f, $\mathcal{G}_S = 1 - 2(\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)) \approx 0{,}42$.

Partie C – Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[0\,;1]$ par :

$$h(x) = \frac{x}{-1+\mathrm{e}^{-1}} \times \left(-1 + \mathrm{e}^{-1x}\right)$$

On admet que $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de la fonction h est une courbe de Lorenz.

1. Démontrer que la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-1})} \times \left(1x^2 + 2(1+1x)\,\mathrm{e}^{-x}\right)$$

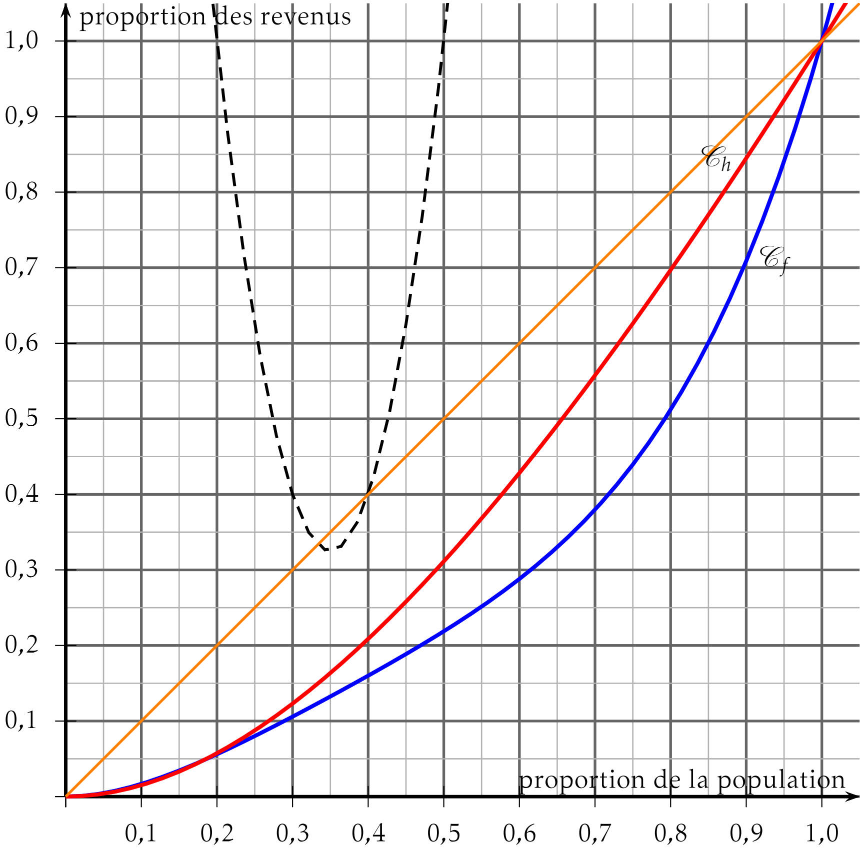
est une primitive de h.

remarquer la constante multiplicative !
H est de la forme $k \times (u(x) + v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b})$ avec

- $u(x)$ une fonction carrée
- $v(x)$ une fonction affine
- e^{ax+b} une fonction composée
- dérivée d'un produit pour $v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

2. Calculer $\mathcal{G}_\mathrm{B}$ en justifiant les calculs (donner une valeur approchée au centième).

$$\mathcal{G}_\mathrm{B} = 1 - 2\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}(0)) = 0{,}254$$


proportion des revenus
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mathscr{C}_h$
$\mathscr{C}_f$
proportion de la population
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

C Co6

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Intégrale *4 points*

Calculer, en détaillant, la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} + 2x \,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$, une primitive de f est $\mathrm{F}(x) = \ln(x) + x^2$, donc $\mathrm{I} = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = \ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e}^2 - (\ln(1) + 1) = 1 + \mathrm{e}^2 - (0 + 1) = \mathrm{e}^2$

Exercice 2 — Richesses et inégalités *16 points*

Tintin et le sceptre d'Ottokar (p.18)

Tintin : L'affaire Tournesol (p.47)

Le graphique représente la répartition des revenus pour les habitants de la Syldavie (fonction f) et pour ceux de la Bordurie (fonction h).

Rappels :

- Une courbe de Lorenz est la représentation d'une fonction $\mathcal{L}$ vérifiant :
  - $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\mathcal{L}(1) = 1$
  - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$
  - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$.
- l'indice de Gini (noté $\mathcal{G}$) est le double de l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $y = x$, et la courbe de lorenz sur $[0;1]$, c'est à dire :
  $\mathcal{G} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathcal{L}(x)\,\mathrm{d}x$
  On note $\mathcal{G}_\mathrm{S}$ l'indice de Gini associé à la Syldavie et $\mathcal{G}_\mathrm{B}$ celui associé à la Bordurie.

Partie A – Graphique

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = 1{,}5x^2 - 3x^3 + 2{,}5x^4$$

1. Tracer la droite d'équation $y = x$ sur le graphique.
2. Donner une valeur approchée de $f(0{,}5)$ et identifier sur le graphique les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ représentations respectives des fonctions f et h.
   (Le graphe en pointillés représente la fonction f'', dérivée seconde de f.)
3. À l'aide d'une lecture graphique, ordonner $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{G}_B$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.
   on obtient un polynôme de degré 3

2. Calculer $f'(0)$. $f'(0) = 0$
3. Le graphe en pointillés est celui de la fonction f'', dérivée seconde de f : c'est une parabole. Lire le signe de $f''(x)$ sur $[0;1]$. D'après le graphique : $f''(x) > 0$.
4. En déduire, en justifiant, le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$, puis les variations de f.
   $f''(x) > 0$ sur $[0;1]$, donc f' est strictement croissante sur $[0;1]$.
   Or $f'(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

5. Justifier à l'aide des réponses aux questions précédentes, que le graphe de la fonction f est une courbe de Lorenz.
   - vérifier $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (présenter les calculs)
   - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$: justifier convexité (dérivée seconde positive)
   - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$. (graphiquement : $\mathscr{C}_f$ est sous la droite d'équation $y = x$)

6. Calculer $\mathcal{G}_S$ en détaillant les calculs (donner une valeur approchée au centième).
   $\mathcal{G}_S = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
   Il faut trouver une primitive F de f, $\mathcal{G}_S = 1 - 2(\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)) \approx 0{,}5$.

Partie C – Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[0\,;1]$ par :

$$h(x) = \frac{x}{-1+\mathrm{e}^{-0.5}} \times \left(-1+\mathrm{e}^{-0.5x}\right)$$

On admet que $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de la fonction h est une courbe de Lorenz.

1. Démontrer que la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par

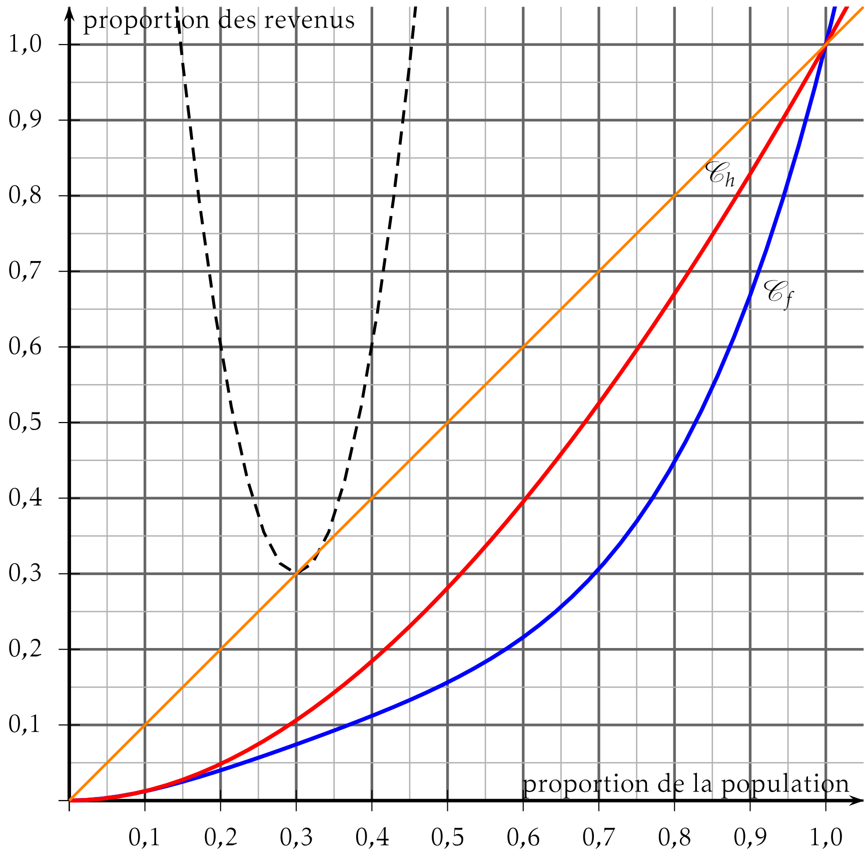
$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{0{,}5(1-\mathrm{e}^{-0{,}5})} \times \left(0{,}25x^2 + 2(1+0{,}5x)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}\right)$$

   est une primitive de h.

   remarquer la constante multiplicative !
   H est de la forme $k \times (u(x) + v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b})$ avec
   - $u(x)$ une fonction carrée
   - $v(x)$ une fonction affine
   - e^{ax+b} une fonction composée
   - dérivée d'un produit pour $v(x)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

2. Calculer $\mathcal{G}_\mathrm{B}$ en justifiant les calculs (donner une valeur approchée au centième).

   $\mathcal{G}_\mathrm{B} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}(0)) = 0{,}293$


proportion des revenus
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mathscr{C}_h$
$\mathscr{C}_f$
proportion de la population
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

D Co6

NOM, Prénom ....

Exercice 1 — Intégrale

4 points

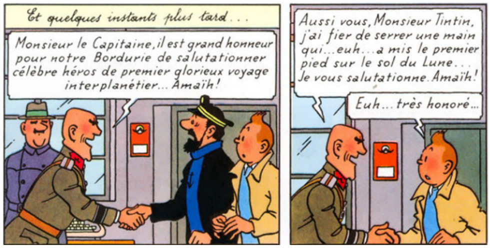
Calculer, en détaillant, la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} + 2x \, \mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$, une primitive de f est $\mathrm{F}(x) = \ln(x) + x^2$, donc $\mathrm{I} = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = \ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e}^2 - (\ln(1) + 1) = 1 + \mathrm{e}^2 - (0 + 1) = \mathrm{e}^2$

Exercice 2 — Richesses et inégalités

16 points

Tintin et le sceptre d'Ottokar (p.18)



Tintin : L'affaire Tournesol (p.47)

Le graphique représente la répartition des revenus pour les habitants de la Syldavie (fonction f) et pour ceux de la Bordurie (fonction h).

Rappels :

- Une courbe de Lorenz est la représentation d'une fonction $\mathcal{L}$ vérifiant :
  - $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\mathcal{L}(1) = 1$
  - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0\,;1]$
  - pour tout $x \in [0\,;1]$: $f(x) \leqslant x$.
- l'indice de Gini (noté $\mathcal{G}$) est le double de l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $y = x$, et la courbe de lorenz sur $[0\,;1]$, c'est à dire :
  $\mathcal{G} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathcal{L}(x)\,\mathrm{d}x$
  On note $\mathcal{G}_{\mathrm{S}}$ l'indice de Gini associé à la Syldavie et $\mathcal{G}_{\mathrm{B}}$ celui associé à la Bordurie.

Partie A – Graphique

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = 1{,}5x^2 - 2{,}5x^3 + 2x^4$$

1. Tracer la droite d'équation $y = x$ sur le graphique.
2. Donner une valeur approchée de $f(0{,}5)$ et identifier sur le graphique les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ représentations respectives des fonctions f et h.
   (Le graphe en pointillés représente la fonction f'', dérivée seconde de f.)
3. À l'aide d'une lecture graphique, ordonner $\mathcal{G}_{\mathrm{S}}$ et $\mathcal{G}_{\mathrm{B}}$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Donner l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.
   on obtient un polynôme de degré 3

2. Calculer $f'(0)$. $f'(0) = 0$
3. Le graphe en pointillés est celui de la fonction f'', dérivée seconde de f : c'est une parabole. Lire le signe de $f''(x)$ sur $[0;1]$. D'après le graphique : $f''(x) > 0$.
4. En déduire, en justifiant, le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$, puis les variations de f.
   $f''(x) > 0$ sur $[0;1]$, donc f' est strictement croissante sur $[0;1]$.
   Or $f'(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

5. Justifier à l'aide des réponses aux questions précédentes, que le graphe de la fonction f est une courbe de Lorenz.
   - vérifier $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (présenter les calculs)
   - $\mathcal{L}(0)$ est croissante et convexe sur $[0;1]$: justifier convexité (dérivée seconde positive)
   - pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) \leqslant x$. (graphiquement : $\mathscr{C}_f$ est sous la droite d'équation $y = x$)

6. Calculer $\mathcal{G}_{\mathrm{S}}$ en détaillant les calculs (donner une valeur approchée au centième).
   $\mathcal{G}_{\mathrm{S}} = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
   Il faut trouver une primitive F de f, $\mathcal{G}_{\mathrm{S}} = 1 - 2(\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)) \approx 0{,}45$.

Partie C – Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[0\,;1]$ par :

$$h(x) = \frac{x}{-1+\mathrm{e}^{-3}} \times \left(-1+\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

On admet que $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de la fonction h est une courbe de Lorenz.

1. Démontrer que la fonction H définie sur $[0\,;1]$ par

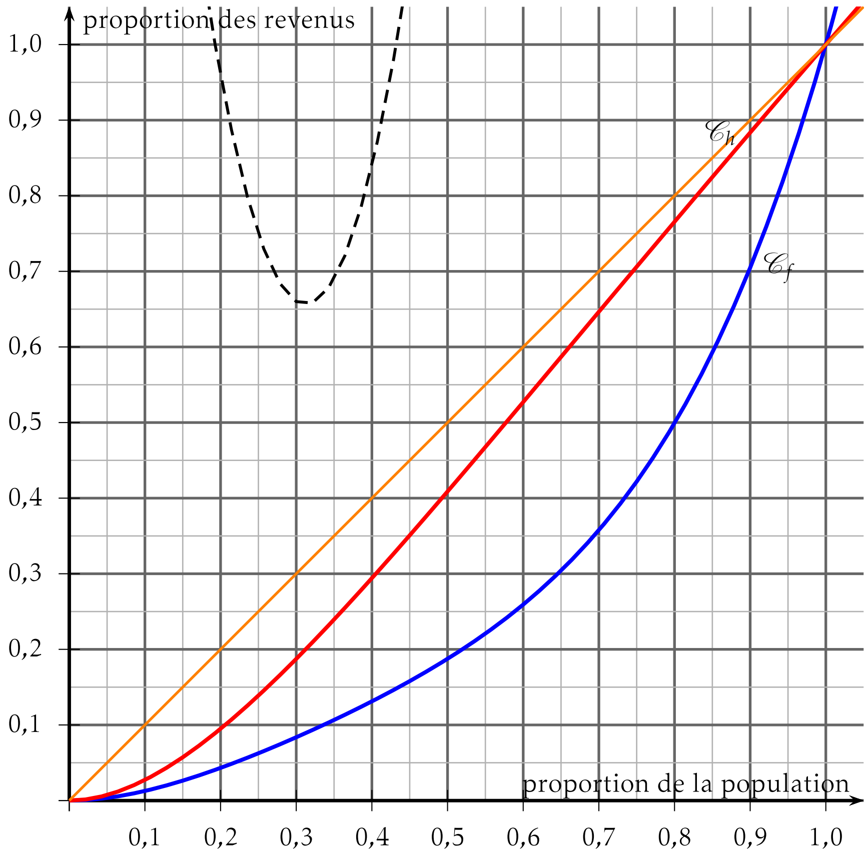
$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{18(1-\mathrm{e}^{-3})} \times \left(9x^2 + 2(1+3x)\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

   est une primitive de h.

   remarquer la constante multiplicative !
   H est de la forme $k \times (u(x) + v(x)\mathrm{e}^{ax+b})$ avec
   - $u(x)$ une fonction carrée
   - $v(x)$ une fonction affine
   - e^{ax+b} une fonction composée
   - dérivée d'un produit pour $v(x)\mathrm{e}^{ax+b}$

2. Calculer $\mathcal{G}_\mathrm{B}$ en justifiant les calculs (donner une valeur approchée au centième).

   $\mathcal{G}_\mathrm{B} = 1 - 2\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(\mathrm{H}(1) - \mathrm{H}(0)) = 0{,}135$



proportion des revenus
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mathscr{C}_h$
$\mathscr{C}_f$
proportion de la population
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0