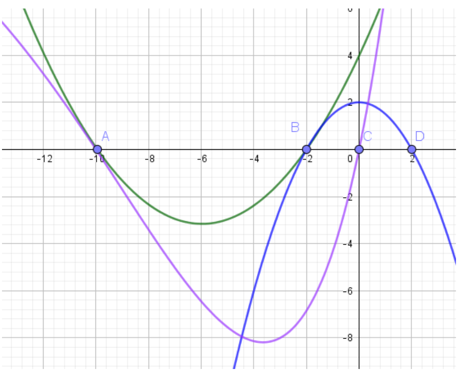
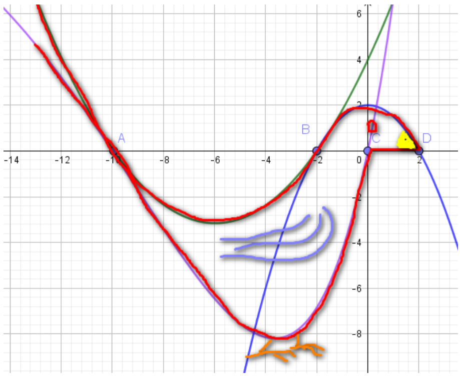
LA POULE DE PÂQUES

Les poules sont composées de deux arcs de paraboles : l'un passant par les points A et B qui forme le dos et une partie de la queue, l'autre entre les points B et D qui forme la tête ; et d'une fonction avec une exponentielle qui passe par les points A, C et E pour former le ventre et la partie supérieure de la queue. Le bas du bec est le segment [CD].

Une fois crées, les poules peuvent être décorées !





Données

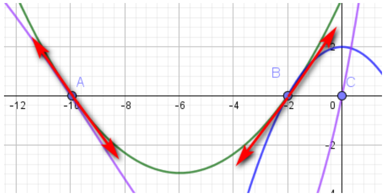
- Les points A, B, C, et D sont sur l'axe des abscisses et ont pour abscisses respectives $-10\,;-2\,;0$ et 2.
- la parabole $\mathscr{P}_f$, passant par A et B est la représentation de la fonction : $f(x) = a(x - x_{\mathrm{A}})(x - x_{\mathrm{B}}) = a(x+10)(x+2)$.
- la parabole la parabole $\mathscr{P}_g$, passant par B et D est la représentation de la fonction : $g(x) = b(x - x_{\mathrm{B}})(x - x_{\mathrm{D}}) = b(x+2)(x-2)$.
- la courbe $\mathscr{C}$ passant par les points A et C a pour équation $h(x) = k(x - x_{\mathrm{C}})(x - x_{\mathrm{A}})\,\mathrm{e}^{\alpha x} = kx(x+10)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.

À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C, et D, puis les curseurs a, b, k et α (les valeurs des curseurs seront données avec **trois** décimales).

Partie 1 — Ventre et queue

1. À l'aide du logiciel, choisir les valeurs de k et α qui vous plaisent pour former le ventre de la poule et le bas de la queue.
   Écrire l'équation de la fonction h.
2. Calculer l'expression de h', la fonction dérivée de h.
3. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par le point A.

Pour que la poule soit élégante, il faut que que les tangentes aux courbes en A et B soient confondues : c'est ce que vont permettre les deux parties suivantes.



Partie 2 — Dos

1. Déterminer l'expression de f', la fonction dérivée de f en fonction de a.
2. Sachant que la droite $\mathscr{T}_{\mathrm{A}}$ doit être tangente à $\mathscr{P}_f$ en A, déterminer la valeur de a.
3. Donner l'expression de f.

Partie 3 — Tête

1. Déterminer la valeur de b telle que les tangentes à $\mathscr{P}_f$ et $\mathscr{P}_g$ en B soient confondues.
2. Donner l'expression de g.

Partie 4 — Surface

La poule est définie pour $x \in [-14\,;2]$.

À l'aide de quatre calculs d'intégrales (il faut découper la poule en quatre parties !) on peut calculer l'aire de la courbe.

1. Vérifier que la fonction $\mathrm{H}(x) = \dfrac{k}{\alpha^3}\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2x^2 + 10\alpha^2 x - 2\alpha x - 10\alpha + 2\right)$ est une primitive de la fonction h (travailler en calcul littéral !)

2. Déterminer les expressions des fonctions F et G, primitives respectives de f et g qui s'annulent en 0.
3. L'aire de la queue de la poule se calcule à l'aide d'une intégrale :
   $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_{-14}^{-10} f(x) - h(x)\,\mathrm{d}x$
   $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_{-14}^{-10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-14}^{-10} h(x)\,\mathrm{d}x$
   $\mathscr{A}_1 = (\mathrm{F}(-10) - \mathrm{F}(-14)) - (\mathrm{H}(-10) - \mathrm{H}(-14))$.
   En déduire l'aide de la queue.
4. Procéder de la même façon afin de calculer l'aire du corps de la poule ; l'aire du cou et l'aire de la tête.
5. En déduire l'aire totale de la poule.